Principes de Finance

13. Théorie des options II

Daniel Andrei

UNIL | Université de Lausanne
HEC Lausanne

Semestre de printemps 2011

Plan

Plan

- Reprenons le modèle de la semaine passée:

$S_0 = 60$
$C_0 = 8.04$
$\delta_0 = 0.65$
$b_0 = -30.94$

$S_1^u = 72$
$C_1^u = 14.29$
$\delta_1^u = 0.96$
$b_1^u = -54.98$

$S_1^d = 50.00$
$C_1^d = 0$
$\delta_1^d = 0$
$b_1^d = 0$

$S_2^{uu} = 86.40$
$C_2^{uu} = 25.40$

$S_2^{ud} = 60.00$
$C_2^{ud} = 0$

$S_2^{dd} = 41.67$
$C_2^{dd} = 0$

- On suppose qu'en période 1, $S_1 = 72$. La modification du portefeuille de réplication est:
  - acheter $0.96 - 0.65 = 0.31$ unités du sous-jacent (en d'autres termes, augmenter la position long de 0.65 à 0.96 actions), ce qui coûte $0.31 \times 72 = 22.49$ CHF.
  - augmenter le montant de l'emprunt de $30.94 \times 1.05 = 32.49$ à 54.98, donc de 22.49 CHF.
- Le montant nécessaire pour acheter l'actif risqué correspond au montant obtenu en augmentant l'emprunt. On dit alors que la stratégie est *auto-financée.*
- On suppose qu'en période 1, $S_1 = 50$. La modification du portefeuille de réplication est:
  - vendre 0.65 unités du sous-jacent et encaisser $0.65 \times 50 = 32.49$ CHF.
  - liquider le montant de l'emprunt, càd rembourser $30.94 \times 1.05 = 32.49$ CHF.
- Les deux montants sont de nouveau les mêmes, donc la stratégie est *auto-financée.*

Plan

- Dans le modèle binomial, il n'est pas nécessaire de connaître les probabilités des différents états de la nature futurs.
- Si ces probabilités étaient connues, on pourrait valoriser l'option comme une espérance actualisée au taux approprié:

$$C_0 = \frac{1}{1+\mu_C}\mathbb{E}_0\left[C_1\right] \tag{1}$$

- Le problème est qu'on doit estimer le taux d'actualisation (μ_C) approprié, *qui dépend du degré d'aversion au risque des investisseurs.*
- Il existe toutefois un cas particulier dans lequel il est simple de calculer le taux d'actualisation: lorsque tous les investisseurs sont neutres vis-à-vis du risque.

- Nous allons reprendre le calcul du cours précédent. On considère un call européen expirant dans une période et ayant pour sous-jacent une action. L'arbre binomial de ce problème s'écrit de la manière suivante:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{l} S_1^u = uS_0 \\ C_1^u = \max\left[S_1^u - K; 0\right] \end{array} \\
 & \nearrow & \\
\begin{array}{l} S_0 \\ C_0 = ? \end{array} & & \\
 & \searrow & \\
 & & \begin{array}{l} S_1^d = dS_0 \\ C_1^d = \max\left[S_1^d - K; 0\right] \end{array}
\end{array}
$$

- On construit un portefeuille de réplication du profil de gain du call à l'échéance. La solution est

$$\begin{cases} \delta & = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0(u-d)} \\ b & = \frac{C_1^d u - C_1^u d}{(1+r)(u-d)} \end{cases} \tag{2}$$

- Le prix du call en début de période est égal au coût de constitution du portefeuille de réplication:

$$\begin{aligned} C_0 &= \delta S_0 + b \\ &= \frac{C_1^u - C_1^d}{u-d} + \frac{C_1^d u - C_1^u d}{(1+r)(u-d)} \\ &= \frac{C_1^u \frac{1+r-d}{u-d} + C_1^d \left(1 - \frac{1+r-d}{u-d}\right)}{1+r} \end{aligned} \tag{3}$$

- Si nous interprétons les grandeurs $\frac{1+r-d}{u-d}$ et $\left(1-\frac{1+r-d}{u-d}\right)$ comme des probabilités, nous avons

$$C_0 = \frac{qC_1^u + (1-q)\, C_1^d}{1+r}, \quad q \equiv \frac{1+r-d}{u-d} \tag{4}$$

- Le prix de l'option aujourd'hui est alors donné par la valeur actuelle de l'espérance du prix de l'option demain, $\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[C_1]$:

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[C_1] = \frac{1}{1+r}\left[qC_1^u + (1-q)\, C_1^d\right] \tag{5}$$

- Dans l'exemple du cours précédent (call européen expirant dans une période, $K = 61$, $S_0 = 60$, $S_1^u = 72$, $S_1^d = 50$, $r = 0.05$) nous pouvons calculer:

$$q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{1.05-0.83}{1.2-0.83} = 0.59,\ 1-q = 0.41 \tag{6}$$

- Le prix du call aujourd'hui est donc de

$$C_0 = \frac{qC_1^u + (1-q)\,C_1^d}{1+r} = \frac{0.59 \times 11 + 0.41 \times 0}{1.05} = 6.19 \tag{7}$$

  qui correspond exactement au prix trouvé par la méthode du portefeuille de réplication.

- *Ce calcul ne nécessite toujours pas d'hypothèse sur les probabilités réelles de la hausse ou la baisse du sous-jacent.*
- Cela signifie que les probabilités q et $(1-q)$ ne sont pas égales aux vraies probabilités. Elles représentent la manière dont les probabilités réelles (toujours inconnues) doivent être ajustées pour que le taux d'actualisation soit égal au taux sans risque.
- Pour cette raison, on donne à q et $(1-q)$ le nom de *probabilités risque-neutre.*

- Dans un monde risque-neutre, le rendement attendu sur tous les actifs est le taux sans risque, r. Ceci signifie qu'on peut obtenir directement les probabilités risque-neutre à partir du prix de l'action:

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[S_1] = \frac{quS_0 + (1-q)\,dS_0}{1+r} \tag{8}$$

- La seule inconnue dans l'équation précédente est q. On obtient effectivement

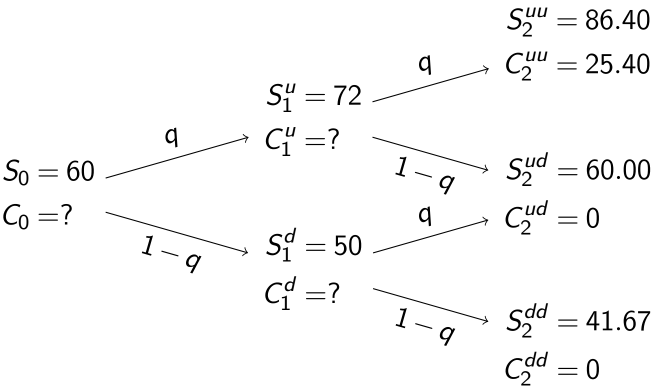
$$q = \frac{1+r-d}{u-d} \tag{9}$$

- Le calcul est vérifié dans notre exemple aussi:

$$\frac{0.59 \times 72 + 0.41 \times 50}{1+r} = 60 \tag{10}$$

- L'évaluation des actifs financiers à l'aide des probabilités risque-neutre est très rapide. Une fois les probabilités risque-neutre calculées, n'importe quel actif financier peut être valorisé, simplement en actualisant au taux sans risque l'espérance de son profil de gain calculée avec les probabilités risque-neutre.
- Le gain en vitesse de calcul va être évident si on considère le modèle multi-périodique, pour la simple raison que nous n'avons plus besoin de construire à chaque période et dans chaque état de nature le portefeuille de réplication.
- Le calcul des prix des options à l'aide des probabilités risque-neutre est donc une deuxième méthode d'évaluation des options.

- On considère l'évolution de l'action de l'exemple précédent sur deux périodes:



- Les probabilités risque-neutre *ne se modifient pas au cours du temps* puisque le taux de variation du prix de l'action ne change pas d'une période à l'autre (u et d restent constants).
- Nous avons maintenant 3 états de nature à la fin:

État	Probabilité
$C_2^{uu} = 25.4$	$q^2 = 0.35$
$C_2^{ud} = 0$	$2q(1-q) = 0.48$
$C_2^{dd} = 0$	$(1-q)^2 = 0.17$

- On remarque que la somme des trois probabilités est 1. Le prix du call est alors donné par

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^2}\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[C_2] = \frac{0.35 \times 25.4 + 0.48 \times 0 + 0.17 \times 0}{(1+r)^2} = 8.04 \quad (11)$$

- Nous avons vu comment la méthode binomiale fonctionne et considéré des exemples à une et deux périodes.
- Pour un nombre arbitraire de périodes n, le prix du call est donné par

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{(1+r)^n}\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[C_n] \\ &= \frac{1}{(1+r)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}q^k(1-q)^{n-k}\max\left[S_0u^kd^{n-k}-K,0\right] \end{aligned} \tag{12}$$

- Nous allons voir dans un instant que si le nombre de périodes devient très grand, alors que la maturité reste la même, la durée de chaque période va tendre vers 0 et la distribution binomiale converge vers une distribution normale. C'est ce qu'on utilise dans la méthode de Black-Scholes.

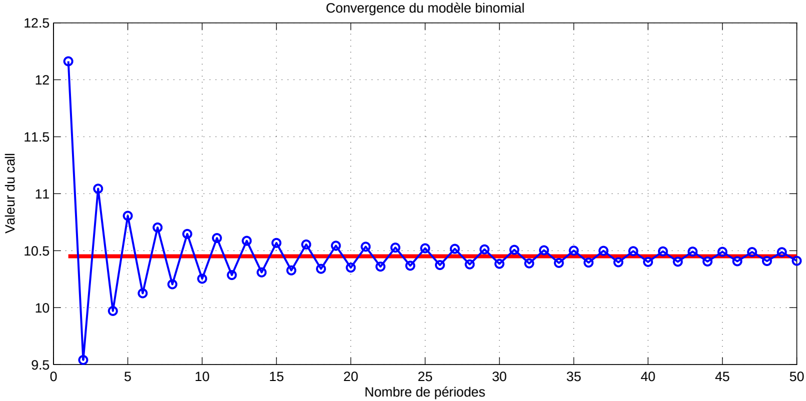
- Le modèle binomial ne nécessite aucune hypothèse sur les préférences des agents, les probabilités d'occurrence des états de la nature futurs ou la rentabilité anticipée du sous-jacent.
- Dans un monde réel, il est probable que les investisseurs manifestent de l'aversion au risque. L'espérance de rendement de tout actif financier doit donc être actualisée à un taux supérieur au taux sans risque.
- Dans un monde risque-neutre, l'espérance de rendement des actifs risqués correspond exactement au taux de rendement sans risque.
- Pour concilier ces deux visions, *le prix de l'action dans le monde risque-neutre doit être exactement égal au prix de l'action dans le monde réel*. Il faut donc ajuster les probabilités réelles (inconnues) afin d'avoir égalité entre les deux prix.
- Ensuite, le prix de n'importe quel actif dérivé peut être obtenu en actualisant au taux sans risque l'espérance *risque-neutre* des flux monétaires futurs versés par cet actif.

Plan

- Pour dériver leur formule, Black et Scholes ont supposé que le cours de l'action était une variable continue, et que pour répliquer une option, les investisseurs devaient donc continuellement ajuster leurs avoirs en actif sous-jacent.
- Leur formule fonctionne remarquablement bien dans la réalité, où les actifs s'échangent de manière intermittente et où les prix sautent d'un niveau à un autre.
- C'est aussi un modèle très flexible: il peut être adapté à l'évaluation d'options sur une variété d'actifs avec des caractéristiques spéciales tels que les devises étrangères, les obligations et les contrats à terme.
- Il a donc eu beaucoup d'influence et est devenu un modèle standard pour l'évaluation des options.

- La formule de Black et Scholes peut sembler difficile, mais elle est très facile à appliquer. Voici les informations dont nous avons besoin:
  - $S_t =$ cours actuel du titre sous-jacent
  - $K =$ prix d'exercice de l'option
  - $\sigma =$ écart-type par année du taux de rentabilité de l'action (capitalisation en continu)
  - $T =$ date d'échéance, le temps jusqu'à échéance étant $T - t$
  - $r =$ taux d'intérêt annuel, continûment composé

- On considère un call européen expirant dans une année ($T = 1$) et ayant pour sous-jacent une action. Le prix d'exercice est de 100 CHF.
- L'action vaut 100 CHF au départ et a une volatilité annuelle de $\sigma = 0.2$. Le taux sans risque est de $r = 0.05$.
- Si on évalue le call en prenant une seule période, nous trouvons $C_0 = 12.16$.
- Si nous prenons 2 périodes, nous avons $C_0 = 9.54$. Pour 3 périodes, nous avons $C_0 = 11.04$.
- 4 périodes $\Rightarrow C_0 = 9.97$, 5 périodes $\Rightarrow C_0 = 10.81$, 6 périodes $\Rightarrow C_0 = 10.1256$, et ainsi de suite.
- Plus on augmente le nombre de périodes, plus le prix semble converger vers une valeur située autour de 10.5 (plus précisément 10.45), comme dans le graphique suivant:


Convergence du modèle binomial
Valeur du call
Nombre de périodes
12.5
12
11.5
11
10.5
10
9.5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

- A noter que chaque fois quand on change le nombre de périodes n, il faut re-calculer les u, d et r correspondants avec la formule suivante:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}},\ d = \frac{1}{u} \text{ et } r = e^{r\frac{T}{n}} - 1 \tag{13}$$

- Il devrait donc y avoir une limite quand le nombre de périodes augmente à infini. Cette limite est donnée par la formule de Black-Scholes.
- Dans ce cas, nous sommes en *temps continu*. Avant, nous étions en *temps discret.*
- Comme la méthode binomiale, la méthode de Black-Scholes repose sur un argument d'arbitrage. Toutefois, le portefeuille de réplication n'est pas modifié de période en période, mais *en continu.*

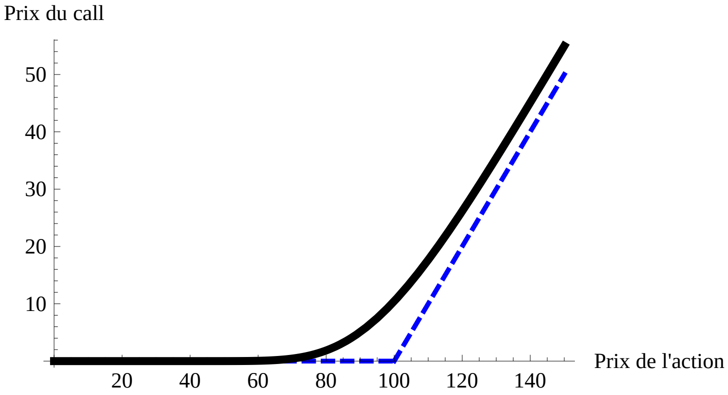
- La formule de Black-Scholes pour évaluer un call sur une action est

$$C_t = S_t \times \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \times \mathcal{N}(d_2) \tag{14}$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left[\frac{S_t}{Ke^{-r(T-t)}}\right]}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{15}$$

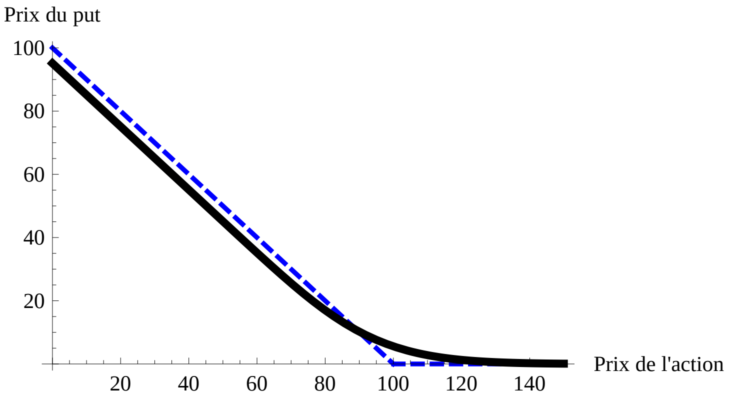
et $\mathcal{N}(d)$ représente la fonction de densité de la loi normale cumulée (càd $\mathcal{N}(d)$ est la probabilité qu'une variable aléatoire x normalement distribuée puisse être inférieure ou égale à d).



- Dans l'exemple précédent, nous trouvons $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.15$, $\mathcal{N}(d_1) = 0.6368$, $\mathcal{N}(d_2) = 0.5596$ et finalement $C_0 = 10.45$.

- Nous pouvons calculer la valeur du put par la rélation de parité

$$\begin{aligned} P_t &= C_t - S_t + Ke^{-r(T-t)} \\ &= Ke^{-r(T-t)}\left[1-\mathcal{N}(d_2)\right] - S_t\left[1-\mathcal{N}(d_1)\right] \\ &= Ke^{-r(T-t)} \times \mathcal{N}(-d_2) - S_t \times \mathcal{N}(-d_1) \end{aligned} \tag{16}$$



- On peut facilement déterminer la composition du portefeuille de réplication dans le modèle de Black-Scholes. Dans le modèle binomial l'équation établissant le prix d'un call était

$$C_t = \delta S_t + b \tag{17}$$

- En comparant cette expression avec la formule de Black-Scholes pour un call (14), il est possible d'identifier le nombre d'actions et l'investissement dans l'actif sans risque nécessaires à la construction du portefeuille de réplication:

$$\delta = \mathcal{N}(d_1) \text{ et } b = -Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2) \tag{18}$$

- En partant de la formule de Black-Scholes pour un put (16), nous obtenons la composition du portefeuille de réplication:

$$\delta = -\mathcal{N}(-d_1) \text{ et } b = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) \tag{19}$$

Ancien examen été 2005

- Les actions d'une entreprise sont cotées en permanence et valent actuellement 50 CHF sur le marché. Leur rendement attendu continûment composé est de 10% par an, et la volatilité annuelle de leur rendement est de 15%. Le taux d'intérêt de l'actif sans risque continûment composé est de 5% par an.
- On considère une option put européenne ayant une maturité de quatre ans et un prix d'exercice de 45. Les paramètres à utiliser dans le modèle de Black-Scholes sont $S_t = 50$, $K = 45$, $r = 0.05$, $T - t = 4$ et $\sigma = 0.15$. On obtient alors $d_1 = 1.1679$, $d_2 = 0.8679$, $\mathcal{N}(-d_1) = 0.1214$, $\mathcal{N}(-d_2) = 0.1927$ et comme valeur de l'option put

$$P_t = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) - S_t\mathcal{N}(-d_1) = 1.0293 \tag{20}$$

Ancien examen été 2005 (suite)

- On désire répliquer la vente à découvert de 500 options put. Pour répliquer une option put, il faut placer

$$Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) = 7.1008 \tag{21}$$

CHF dans l'actif sans risque et vendre $\mathcal{N}(-d_1) = 0.1214$ actions à découvert. Pour répliquer la vente à découvert de 500 options put, il faut donc emprunter $3'550.42$ CHF et acheter 60.7150 actions.

- Vous détenez 1'000 actions de la société et désirez vous prémunir contre une baisse de la valeur de votre portefeuille en dessous de 45'000 CHF dans quatre ans. Vous désirez toutefois conserver vos actions, car vous considérez qu'elles ont un bon potentiel de hausse.
- Pour couvrir le risque de baisse, on peut acheter 1'000 options put avec un prix d'exercice de 45. Ceci coûte 1'029.346 francs.

Ancien examen été 2005 (suite)

- On suppose maintenant qu'aucune option ne soit disponible sur le marché pour assurer votre portefeuille. Pour répliquer l'achat de 1'000 options put, il faut investir $7'100.8$ CHF dans l'actif sans risque et vendre à découvert 121.4 actions. La position totale est donc de $7'100.8$ CHF dans l'actif sans risque et $1'000 - 121.4 = 878.6$ actions.
- Lorsque le cours du sous-jacent baisse, nous allons vendre de plus en plus du sous-jacent à découvert, et placer un montant plus élevé dans l'actif sans risque. Cette modification de la position reflète la probabilité de plus en plus élevée *que le put soit exercé.*
- Lorsque le cours du sous-jacent monte, nous allons acheter des actions en réduisant le montant placé dans l'actif sans risque. Cette modification de la position reflète la probabilité de plus en plus élevée *que le put ne soit pas exercé*.

Plan

Résumé

- Les probabilités risque-neutre sont les probabilités qui permettent d'égaliser le prix observé de l'action avec l'espérance actualisée au taux sans risque des prix futurs de cette dernière.
- Dans un arbre binomial, la probabilité risque-neutre q associée à l'état de la nature haussier de l'actif sous-jacent est donnée par

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} \tag{22}$$

- Le prix de n'importe quel actif dérivé peut être obtenu en actualisant au taux d'intérêt sans risque l'espérance (calculée à l'aide des probabilités risque-neutre) des flux monétaires futurs versés par cet actif.

Résumé (suite)

- Cinq paramètres sont nécessaires pour évaluer une option dans le modèle de Black-Scholes: le prix de l'actif sous-jacent S_t, sa volatilité σ, le prix d'exercice de l'option K, sa date d'expiration T et le taux sans risque r.
- Il n'est pas nécessaire de connaître l'espérance de rendement de l'actif sous-jacent pour valoriser une option.
- La formule de Black-Scholes pour évaluer un call est

$$C_t = S_t \times \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \times \mathcal{N}(d_2) \tag{23}$$

avec $\mathcal{N}(d)$ la valeur de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite au point d et

$$d_1 = \frac{\ln\left[\frac{S_t}{Ke^{-r(T-t)}}\right]}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{24}$$

Résumé (suite)

- La formule de Black-Scholes pour évaluer un put est

$$P_t = Ke^{-r(T-t)} \times \mathcal{N}(-d_2) - S_t \times \mathcal{N}(-d_1) \tag{25}$$

- Le portefeuille de réplication dans le modèle de Black-Scholes s'écrit
  - Pour un call

$$\delta = \mathcal{N}(d_1) \text{ et } b = -Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2) \tag{26}$$

  - Pour un put

$$\delta = -\mathcal{N}(-d_1) \text{ et } b = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) \tag{27}$$