Principes de Finance

12. Théorie des options I

Daniel Andrei

UNIL | Université de Lausanne

HEC Lausanne

Semestre de printemps 2011

Plan

Plan

- Une option offre à son détenteur le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre dans le futur un actif—qualifié d'actif sous-jacent—à un prix fixé aujourd'hui.
  - si l'option permet d'acheter, on parle alors d'option d'achat ou de *call*.
  - si l'option permet de vendre, on parle alors d'option de vente ou de *put*.
- Les options les plus répandues sont celles qui ont pour actif sous-jacent une action.
- En plus des options sur les actions ordinaires, les investisseurs peuvent maintenant en négocier sur les indices boursiers, les obligations, les marchandises, les devises, les conditions météorologiques et même la volatilité des actifs financiers.

- Dans ce cours, nous allons voir
  - comment fonctionnent les options d'achat ou de vente et de quelle manière leur payoff dépend du cours de l'actif sous-jacent.
  - comment les options peuvent être combinés pour réaliser des stratégies d'investissement profitables, ou pour réduire le risque d'un portefeuille.
  - comment déterminer la valeur d'une option sur la base de valeurs observables sur le marché.
- Avant tout, quelques notions de vocabulaire:
  - lorsque le détenteur décide de profiter de l'opportunité dont il dispose, il *exerce* l'option.
  - le prix auquel le détenteur achète ou vend l'actif sous-jacent, lorsque l'option est exercée, est appelé *prix d'exercice* (**strike price**).
  - les *options européennes* ne sont exerçables qu'au moment de l'échéance du contrat.
  - les *options américaines* sont exerçables à tout moment entre leur émission et la date d'échéance du contrat.

- s'il est possible de tirer profit d'un exercice immédiat d'une option, cette dernière est *dans la monnaie* (**in the money**). Dans le cas contraire, on parle d'option *en dehors de la monnaie* (**out of the money**).
- une option est un contrat entre deux parties: l'acheteur de l'option a une position *"longue"*, tandis que le vendeur (ou option writer) à une position *"courte"*.
- les options peuvent être échangées de gré à gré (on parle alors de marchés *OTC*, pour Over-The-Counter) ou sur des marchés organisés.

- Le Chicago Board Options Exchange (CBOE) fut instauré en 1973 pour permettre aux investisseurs d'acheter et de vendre des options sur actions ordinaires.
- Le CBOE fut presque instantanément un succès et d'autres places financières ont depuis copié cet exemple.

Plan

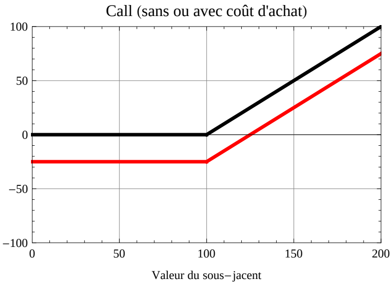
- On considère un call européen de prix d'exercice K. Soit S_T le cours du sous-jacent à l'échéance de l'option en période T.
  - Lorsque à l'échéance le prix du sous-jacent est supérieur au prix d'exercice, la valeur du call est égale à $S_T - K$.
  - Au contraire, lorsque le prix du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice, le détenteur de l'option n'exerce pas le call: la valeur de l'option est donc nulle.
- La valeur de l'option call à l'échéance, C_T, est donnée par la relation suivante:

$$C_T = \max\left[S_T - K, 0\right] \tag{1}$$

- L'acheteur du put exercera l'option si le prix du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice. La valeur P_T du put à l'échéance est donc:

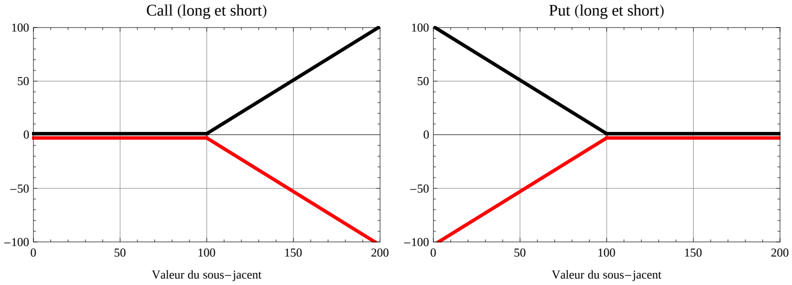
$$P_T = \max\left[K - S_T, 0\right] \tag{2}$$

- Le profil de gain pour un acheteur de call ou de put arrivant à échéance est représenté dans le graphique suivant (lignes noires):



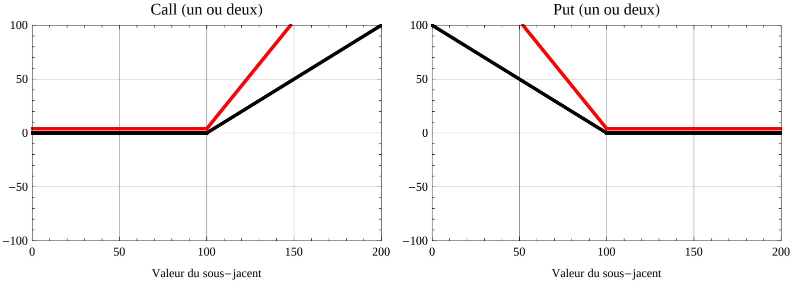
- Si on prend en compte le coût d'achat des options, le gain à l'expiration peut être plus faible que le coût d'achat initial de l'option. Ceci est représenté dans le graphique par les lignes rouges.

- Le vendeur de l'option est dans l'obligation de vendre (dans le cas d'un call) ou d'acheter (dans le cas d'un put) au prix d'exercice spécifié par le contrat, si l'option est exercée. Cet investisseur se trouve alors dans la situation symétrique à celle de l'acheteur du contrat.

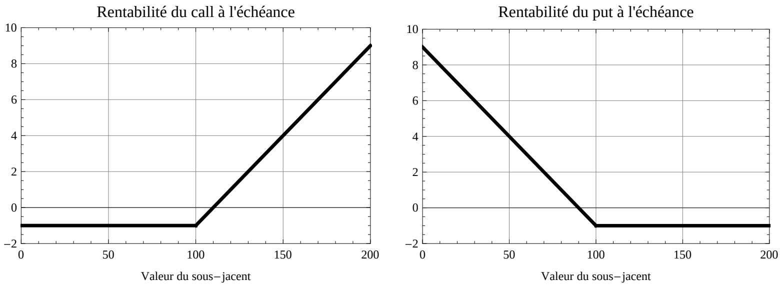


- Ceci illustre le fait que les options sont des titres à somme nulle. Au gain éventuel du détenteur correspond une perte pour l'émetteur.

- Comme le prix d'une action ne peut pas être négatif, la perte réalisée par un vendeur de put est limitée au prix d'exercice. En revanche, la perte d'un vendeur de call est potentiellement illimitée.
- Acheter plusieurs options va modifier le profil de gain du détenteur comme montré dans le graphique suivant:

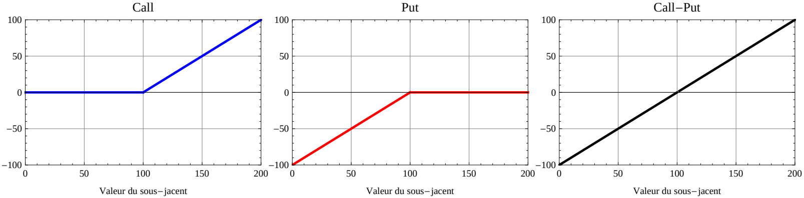


- Il est également possible de calculer les rentabilités potentielles des positions optionnelles détenues jusqu'à échéance:
  - La perte maximale pour l'acheteur est de 100%.
  - On peut obtenir des rentabilités très élevées en cas du hausse important du sous-jacent (pour le call) ou baisse importante du sous-jacent (pour le put).



- Le risque associé à une position optionnelle est donc plus important que celui d'une position dans l'actif sous-jacent.

- Supposez que vous achetez un call et vendez un put avec une maturité T et un prix d'exercice K identiques. Votre payoff à l'échéance est



- Votre gain ou perte à l'échéance est de

$$\begin{aligned} C_T - P_T &= \max[S_T - K, 0] - \max[K - S_T, 0] \\ &= \max[S_T - K, 0] + \min[S_T - K, 0] \\ &= S_T - K \end{aligned} \tag{3}$$

- A l'échéance en période T, nous avons donc $C_T - P_T = S_T - K$.
- Nous avons donc deux stratégies présentant le même profil de gain à l'échéance:
  1. Acheter un call et vendre un put, avec un coût aujourd'hui de $C_t - P_t$
  2. Acheter une action et emprunter au taux sans risque une valeur faciale de K, avec un coût aujourd'hui de $S_t - VA(K)$, ou $VA(K)$ denote la valeur actuelle du prix d'exercice.
- D'après la Loi du prix unique, ces deux stratégies doivent avoir le même coût initial:

$$C_t - P_t = S_t - VA(K) \tag{4}$$

- Cette relation de parité peut être exprimée de différentes manières, donnant à chaque fois des positions équivalentes.

- Le prix d'un call européen est:

$$C_t = P_t + S_t - VA(K) \tag{5}$$

elle signifie qu'acheter un call est équivalent à acheter un put et une action, et emprunter un montant égal à la valeur actuelle du prix d'exercice.

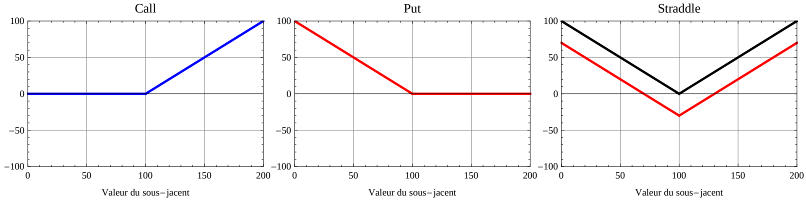
- Le prix d'un put européen est:

$$P_t = C_t - S_t + VA(K) \tag{6}$$

elle signifie qu'acheter un put est équivalent à acheter un call, vendre une action (short) et investir un montant égal à la valeur actuelle du prix d'exercice dans un actif sans risque.

Le straddle

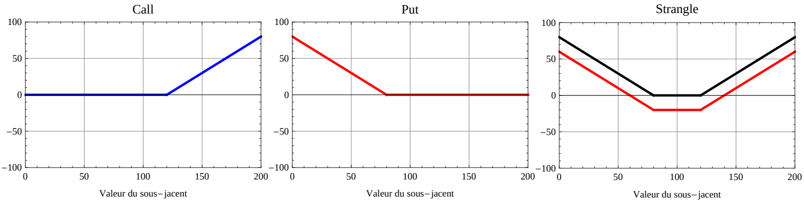
- L'investisseur détient jusqu'à échéance un call et un put de mêmes prix d'exercice et dates d'expiration. Le profil de gain (brut et net de primes) est illustré dans le graphique suivant.



- Plus le prix du sous-jacent est éloigné du prix d'exercice (peu importe la direction), plus le gain est élevé. A utiliser si on anticipe des larges mouvements du prix du sous-jacent, sans pour autant avoir d'anticipations quant au sens de ces mouvements.

Le strangle

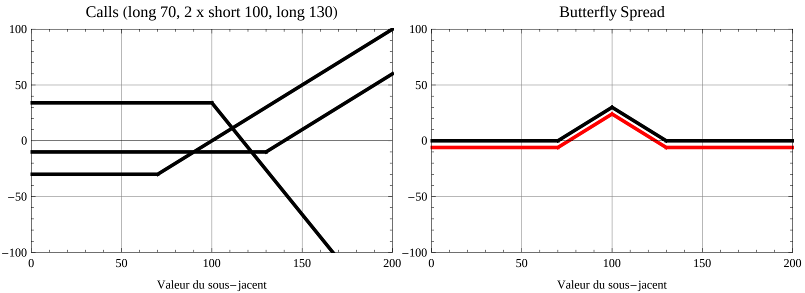
- Stratégie similaire au straddle, sauf que le prix d'exercice du put est plus petit que le prix d'exercice du call.



- On peut choisir d'acheter un put avec prix d'exercice plus éloigné quand nous sommes plus confiants dans la direction du mouvement du sous-jacent.

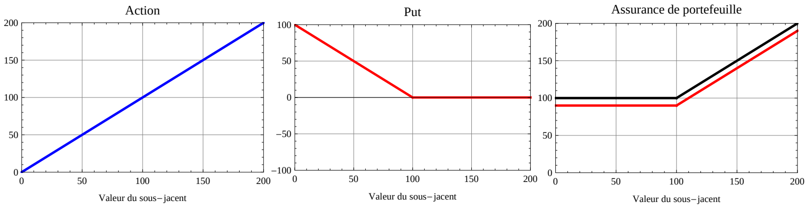
L'écart papillon (butterfly spread)

- Cette stratégie est fondée sur l'utilisation de quatre options de même échéance écrites sur le même sous-jacent, avec trois prix d'exercices différents. Le profil de gain est le suivant:

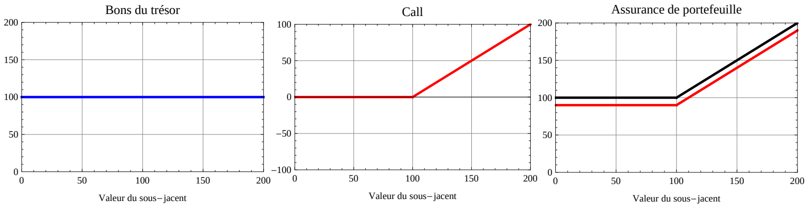


- Cette stratégie génère des profits lorsque le prix du sous-jacent reste stable.

- Il est possible d'utiliser les options pour protéger un portefeuille contre une baisse potentielle de sa valeur.
- Il suffit pour cela d'acheter une option put. Le profil de gain à l'échéance du portefeuille constitué sera:



- En utilisant la relation de parité call-put, nous pouvons obtenir le même portefeuille en prenant une position longue en bons du Trésor (faire un prêt) plus une option call:

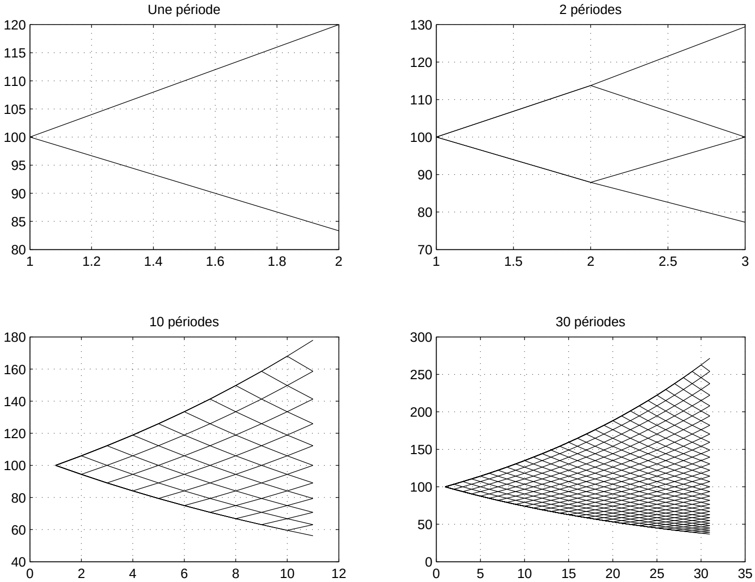


Plan

- Avant d'arriver au calcul des prix des options, il est utile d'étudier les différents facteurs qui influencent le prix des calls et des puts:
  1. **Prix d'exercice**: plus le prix d'exercice est grand, plus le prix du call est faible et celui du put élevé.
  2. **Prix du sous-jacent**: plus le prix de marché du sous-jacent est élevé, plus le prix du call est élevé et celui du put faible.
  3. **Volatilité**: la valeur d'une option augmente généralement avec la volatilité du sous-jacent.
  4. **Date d'exercice**: plus l'échéance d'une option call est lointaine, plus elle a de la valeur; pour le put, l'effet est ambigu.

- Le prix d'une option ne peut pas être négatif.
- Le gain maximum associé à une position longue en put est obtenu lorsque le prix du sous-jacent tombe à 0. Le gain est alors égal au prix d'exercice du put. Un put ne peut donc valoir plus que son prix d'exercice.
- Si un call avait un prix d'exercice nul, son détenteur exercerait toujours l'option et recevrait gratuitement le sous-jacent. Par conséquent, un call ne peut donc valoir plus que l'actif sous-jacent.
- La valeur intrinsèque d'une option correspond à sa valeur en cas d'exercice immédiat. Une option américaine ne peut donc pas valoir moins que sa valeur intrinsèque.

- Le premier modèle d'évaluation des options présenté est le modèle binomial, développé par Cox, Ross et Rubinstein en 1979.
- Ce modèle repose sur l'hypothèse que le prix de l'action sous-jacente ne peut prendre que deux valeurs à la période suivante.
- Cette hypothèse semble trop simplificatrice, mais en effet nous pouvons toujours diviser l'intervalle jusqu'à maturité en de plus faibles intervalles pour rendre le modèle plus réaliste.
- Il est donc facile de généraliser ce modèle en augmentant le nombre de périodes tout en diminuant leur longueur, comme dans le graphique suivant.
- Avec un modèle à n périodes, le nombre final d'états de la nature est égal à $n+1$. De plus, on peut prouver que si on fait tendre n vers infini on tombe sur la formule de Black et Scholes.


Une période
2 périodes
10 périodes
30 périodes

- On suppose qu'une action ne peut prendre que deux valeurs dans une période. Dans ce cas, il est possible de valoriser le prix d'une option en construisant un portefeuille de réplication.
- La valeur à la fin de ce portefeuille correspond exactement au profil de gain de l'option.
- Ce portefeuille est uniquement composé de bons du Trésor et de l'action sous-jacente.
- Puisque le profil de gain du portefeuille est par construction identique à celui de l'option, par application de la Loi du prix unique, les valeurs du portefeuille et de l'option doivent être égales en début de période.

Exemple

- On considère un call européen expirant dans une période et ayant pour sous-jacent une action. Le prix d'exercice est de 61 CHF.
- L'action ne verse pas de dividende. Elle vaut 60 CHF au départ et ne peut prendre que deux valeurs à la fin: 50 CHF ou 72 CHF. Le bon du Trésor offre un taux de rendement de 5% sur la période.
- Il est possible de résumer ces informations grâce à un arbre binomial:

$$\begin{array}{lcl} & & S_1^u = 72 \\ & & B_1^u = 1.05 \\ S_0 = 60 & \nearrow & C_1^u = \max[72-61; 0] = 11 \\ B_0 = 1 & & \\ C_0 = ? & \searrow & S_1^d = 50 \\ & & B_1^d = 1.05 \\ & & C_1^d = \max[50-61; 0] = 0 \end{array}$$

Exemple (suite)

- On définit δ et b comme respectivement le nombre d'actions et le montant de l'emprunt en bons de Trésor, afin de répliquer le profil de gain du call en fin de période.
- Dans le deux états de nature, la valeur de ce portefeuille de réplication est:

$$\begin{cases} 72\delta + 1.05b & = 11 \\ 50\delta + 1.05b & = 0 \end{cases} \tag{7}$$

- La solution unique de ce système de deux équations à deux inconnues est

$$\delta = 0.5, \quad b = -23.81 \tag{8}$$

Exemple (suite)

- Ainsi, un portefeuille composé d'une position longue de 0.5 actions et d'un credit ($b < 0$) de 23.81 CHF réplique parfaitement la valeur de l'option à l'échéance (en période 1). On peut le vérifier en remarquant que:

$$\begin{cases} 72 \times 0.5 - 1.05 \times 23.81 & = 11 \\ 50 \times 0.5 - 1.05 \times 23.81 & = 0 \end{cases} \tag{9}$$

- Par conséquent, pour éviter l'arbitrage, le prix de l'option sur le marché en période 0 doit être égal au coût du portefeuille de réplication:

$$60\delta + b = 60 \times 0.5 - 23.81 = 6.19 \ \ CHF$$

Exemple (suite)

- Si le prix du call était différent, il existerait une opportunité d'arbitrage. Supposons que le prix du call était de 7.19 CHF. On pourrait réaliser un profit en achetant le portefeuille de réplication à 6.19 CHF et en vendant le call à 7.19 CHF.
- Ces deux portefeuilles ayant les mêmes profils de gains futurs, il n'y a aucun risque à faire cela, et on réalise un profit immédiat de 1 CHF par option vendue.
- Le principal avantage de la formule précédente est qu'il n'est pas nécessaire de connaître les probabilités associées à la hausse et la baisse du prix de l'action pour évaluer l'option.
- Ce résultat est remarquable: ces probabilités dépendent des croyances de chaque investisseur, complexes à estimer.
- La connaissance de ces probabilités est inutile, de même que celle de l'espérance de rentabilité de l'action qui dépend directement de ces probabilités.

Formule générale

- Le raisonnement sous-jacent au modèle binomial ayant été exposé, il est maintenant possible de généraliser cette analyse.
- On considère un nombre fini de périodes $t = 0, ..., T$. On suppose que le prix actuel de l'action est de S_0. Chaque période, le cours du sous-jacent peut soit "monter" $(S_{t+1} = uS_t,\ u > 1)$ si le marché et haussier, soit "descendre" $(S_{t+1} = dS_t,\ d < u)$ si le marché est baissier.
- Le taux d'intérêt sans risque d'une période à l'autre est de r. Pour éviter l'arbitrage, il faut que $d < 1 + r < u$.
- Soit K le prix d'exercice. L'objectif est d'évaluer le prix actuel, C_0, d'un call dont la valeur sera C_1^u si le prix de l'action monte et C_1^d dans le cas contraire.

Formule générale (suite)

- L'arbre binomial de ce problème s'écrit donc de la manière suivante (l'actif sans risque n'est plus représenté):

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{l} S_1^u = uS_0 \\ C_1^u = \max\left[S_1^u - K; 0\right] \end{array} \\
 & \nearrow & \\
\begin{array}{l} S_0 \\ C_0 = ? \end{array} & & \\
 & \searrow & \\
 & & \begin{array}{l} S_1^d = dS_0 \\ C_1^d = \max\left[S_1^d - K; 0\right] \end{array}
\end{array}
$$

Formule générale (suite)

- On construit, comme précédemment, un portefeuille de réplication du profil de gain du call à l'échéance. Ce portefeuille est composé de δ actions et d'un emprunt de montant b. Le système de deux équations à deux inconnues est le suivant:

$$\begin{cases} \delta S_1^u + (1+r)\, b & = C_1^u \\ \delta S_1^d + (1+r)\, b & = C_1^d \end{cases} \tag{10}$$

- La solution représente la composition du portefeuille de réplication dans le modèle binomial:

$$\begin{cases} \delta & = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_1^u - S_1^d} = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0(u-d)} \\ b & = \frac{C_1^d u - C_1^u d}{(1+r)(u-d)} = \frac{C_1^u - \delta S_1^u}{1+r} = \frac{C_1^d - \delta S_1^d}{1+r} \end{cases} \tag{11}$$

- La formule donnant la valeur de δ peut s'interpréter comme la sensibilité du prix du call aux variations du prix de l'action.

Formule générale (suite)

- Une fois connue la composition du portefeuille de réplication, il est aisé de calculer le prix du call en début de période; il est égal au coût de constitution du portefeuille de réplication:

$$C_0 = \delta S_0 + b \tag{12}$$

- Le portefeuille de réplication est composé d'une position de δ actions et un emprunt de b. Le beta du portefeuille, et donc de l'option vaut:

$$\beta_{\text{Option}} = \frac{\delta S_0}{\delta S_0 + b}\beta_S + \frac{b}{\delta S_0 + b}\beta_{\text{Bons du Trésor}} = \frac{\delta S_0}{\delta S_0 + b}\beta_S \tag{13}$$

- Le beta d'un call est toujours supérieur à celui de l'action sous-jacente. A l'inverse, le beta d'un put est négatif.

- Pour rendre le modèle binomial plus réaliste, il s'avère utile de l'étendre au cas multi-périodique. Si on considère l'évolution de l'action de l'exemple précédent sur deux périodes nous avons:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & S_2^{uu} = 86.40 \\
 & & & \nearrow & C_2^{uu} = 25.40 \\
 & & S_1^u = 72 & & \\
 & \nearrow & C_1^u = ? & \searrow & \\
S_0 = 60 & & & & S_2^{ud} = 60.00 \\
C_0 = ? & & & \nearrow & C_2^{ud} = 0 \\
 & \searrow & S_1^d = 50 & & \\
 & & C_1^d = ? & \searrow & \\
 & & & & S_2^{dd} = 41.67 \\
 & & & & C_2^{dd} = 0
\end{array}
$$

- Nous allons utiliser la propriété principale du modèle binomial: à chaque période, seuls deux prix de l'action sont possibles à partir d'un état de nature donné.
- Il faut donc raisonner de manière récursive, en partant de la fin de l'arbre. Supposons qu'en période 1, $S_1 = 72$. Le reste de l'arbre est alors:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & S_2^{uu} = 86.4 \\
 & \nearrow & C_2^{uu} = 25.4 \\
S_1^u = 72 & & \\
C_1^u = ? & & \\
 & \searrow & S_2^{ud} = 60.0 \\
 & & C_1^{ud} = 0
\end{array}
$$

- Cette partie de l'arbre binomial est semblable à celle étudiée dans notre premier exemple.

- Le portefeuille de réplication est alors

$$\delta_1^u = \frac{C_2^{uu} - C_2^{ud}}{S_2^{uu} - S_2^{ud}} = \frac{25.4}{86.4 - 60} = 0.962 \tag{14}$$

$$b_1^u = \frac{C_2^{uu} - \delta_1^u S_2^{uu}}{1+r} = \frac{25.4 - 83.127}{1.05} = -54.98 \tag{15}$$

et le prix du call est

$$C_1^u = \delta_1^u S_1^u + b_1^u = 14.29 \tag{16}$$

- Si on suppose maintenant qu'en période 1, $S_1 = 50$, on observe que le call est sans valeur quel que soit l'état de nature qui se réalisera à la date 2. Donc le call ne vaut rien à la date 1, et le portefeuille de réplication est simplement $\delta_1^d = 0$ et $b_1^d = 0$.
- La valeur du call dans les deux états de la nature possibles de la date 1 est maintenant connue. Il est donc possible de reculer d'une période et de déterminer la valeur du call à la date 0. L'arbre binomial correspondant à la première période est:

$$
\begin{array}{lcl}
 & & S_1^u = 72 \\
 & \nearrow & C_1^u = 14.29 \\
S_0 = 60 & & \\
C_0 = ? & & \\
 & \searrow & S_2^{ud} = 50.00 \\
 & & C_1^{ud} = 0
\end{array}
$$

- On a alors $\delta_0 = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_1^u - S_1^d} = 0.65$ et $b_0 = \frac{C_1^u - \delta_0 S_1^u}{1+r} = -30.94$, et le prix du call est donc de $C_0 = \delta_0 S_0 + b_0 = 8.04$.
- Pour résumer:

$$S_0 = 60 \quad C_0 = 8.04 \quad \delta_0 = 0.65 \quad b_0 = -30.94$$

$$S_1^u = 72 \quad C_1^u = 14.29 \quad \delta_1^u = 0.96 \quad b_1^u = -54.98$$

$$S_1^d = 50.00 \quad C_1^d = 0 \quad \delta_1^d = 0 \quad b_1^d = 0$$

$$S_2^{uu} = 86.40 \quad C_2^{uu} = 25.40$$

$$S_2^{ud} = 60.00 \quad C_2^{ud} = 0$$

$$S_2^{dd} = 41.67 \quad C_2^{dd} = 0$$

- Si le nombre de périodes devient très grand, la distribution binomiale converge vers une distribution normale. C'est ce qu'on utilise dans la méthode de Black-Scholes.
- La méthode de Black-Scholes est pour ainsi dire le cas limite de la méthode binomiale.
- Cette idée représente donc le fondement du modèle de Black et Scholes: il est possible de répliquer le profil de gain d'une option à chaque date en modifiant la composition du portefeuille de réplication à toutes les dates intermédiaires.
- Cette technique est connue sous le nom de *stratégie de réplication dynamique* (**dynamic trading strategy**).

Plan

- Une option offre à son détenteur le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre dans le futur un actif—qualifié d'actif sous-jacent—à un prix fixé aujourd'hui.
- La valeur d'un call à l'échéance est:

$$C_T = \max\left[S_T - K, 0\right] \tag{17}$$

- La valeur d'un put à l'échéance est:

$$P_T = \max\left[K - S_T, 0\right] \tag{18}$$

- Un investisseur ayant une position courte sur une option est contraint par le choix du détenteur de l'option.

- La parité call-put établit une relation entre la valeur d'un call européen et celles d'un put européen et du sous-jacent:

$$C_t = P_t + S_t - VA(K) \tag{19}$$

- Une option peut être évaluée grâce à un portefeuille qui réplique son profil de gain dans les différents états de la nature.
- Le prix de l'option est égal à la valeur du portefeuille de réplication. Pour que ce portefeuille réplique parfaitement le profil de gain de l'option, il est nécessaire d'ajuster en permanence sa composition, en fonction des variations de prix de l'actif sous-jacent.
- Le beta d'un option peut être calculé à l'aide du beta de son portefeuille de réplication.