

**FACULTE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
DE L'UNIVERSITE DE LAUSANNE**

<u>Professeurs :</u> D. Andrei C. Bobtcheff	<u>Matière :</u> Principes généraux de finance	<u>Session :</u> Eté 2012
--	---	--

Informations générales:

- Documentation autorisée.
- Toutes calculatrices autorisées.
- Enoncé de l'examen de 35 pages (page de titre comprise).
- Le nombre total de points est de 100.
- Prière de répondre directement dans les espaces prévus à cet effet. Sauf mention explicite à la question concernée, les feuilles de brouillon ne seront pas corrigées.

Nom et prénom	No matricule	No de place

Note finale:

Q1 :

Q2 :

Q3 :

Q4 :

Bonus :

Total :

Exercice 1 (30 points)

Vous avez le projet d'ouvrir un magasin de fleurs. Sachant qu'en 2015, vous souhaitez partir faire un tour du monde pendant deux ans, vous savez que vous fermerez le magasin le 31 décembre 2014. La rénovation et la mise en conformité du local que vous avez repéré s'effectuera au cours de ce semestre et vous pourrez lancer votre nouvelle activité le 1^{er} janvier 2013.

Les travaux au cours de ce semestre s'élèveraient à 100'000 CHF. De plus, vous devriez acheter du matériel pour 250'000 CHF qui pourrait être revendu 175'000CHF à la fin de votre activité. L'amortissement semestriel est de 25'000 CHF.

Vous avez estimé les coûts de fonctionnement de votre nouvelle activité pour les deux prochaines années. L'offre de fleurs est dépendante de la saison : il est beaucoup plus coûteux pour vous de vous procurer des fleurs en hiver qu'en été. De plus, les clients achètent plus de fleurs l'été. On considère que le semestre d'hiver est le premier semestre de l'année, et que le semestre d'été est le deuxième semestre de l'année.

Vous ne souhaitez pas être seul à vous occuper du magasin et hésitez entre embaucher quelqu'un à 100% ou à 50% sur l'année entière. Si votre employé travaille à temps partiel (c'est-à-dire à 50% sur l'année entière), une nouvelle législation vous autorise à distribuer son temps de travail annuel comme vous le souhaitez :

- l'employé peut travailler à 50% pendant le semestre d'hiver et à 50% pendant le semestre d'été,
- l'employé peut travailler à 0% pendant le semestre d'hiver et à 100% pendant le semestre d'été,
- de façon plus générale, l'employé peut travailler à $x\%$ le semestre d'hiver et à $(100-x)\%$ le semestre d'été, avec $x \in [0,100]$.

Un employé embauché à 100% sur l'année entière travaille donc à 100% le semestre d'hiver et à 100% le semestre d'été.

Avoir une personne supplémentaire ajoute un salaire à payer sachant que le salaire semestriel à temps plein (100%) est de 30'000 CHF, mais permet d'augmenter les ventes (en proportion du taux d'embauche semestriel). En plus du salaire, il vous faut payer chaque semestre les charges sociales semestrielles qui s'élèvent à 40% du salaire semestriel en cas de taux d'embauche semestriel strictement supérieur à 80% (il n'y a pas de charges sociales en cas d'embauche semestrielle inférieure ou égale à 80%).

Les flux prévisionnels sont donnés dans le tableau suivant :

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
	semestre d'hiver 2013	semestre d'été 2013	semestre d'hiver 2014	semestre d'été 2014
loyer	6 000	6 000	6 000	6 000
coûts d'entretien et de fonctionnement	4 000	4 500	4 000	4 500
BFR	1 000	1 200	1 400	1 800
quantité de bouquets vendus en un semestre par une personne à temps plein	1 000	5 000	1 000	5 000
prix unitaire moyen d'un bouquet	40	50	40	50
coût d'approvisionnement des fleurs pour un bouquet	20	5	20	5

En outre, les informations suivantes vous sont données :

- nous sommes le 1er juillet 2012, c'est-à-dire que $t = 0$ au semestre d'été 2012,
- le taux d'imposition est de 30% ; les pertes ne sont pas imposables,
- le BFR est égal à 0 au semestre d'été 2012,
- le taux d'actualisation effectif semestriel est de 1%,
- en tant que gérant, vous ne vous payez pas de salaire, mais vous vendez des bouquets comme un employé à temps plein.

Questions :

1. **(26 points)** Calculez la VAN du projet dans les trois cas suivants :
 - i) vous embauchez une personne à temps plein,
 - ii) vous embauchez une personne à 50% pendant les deux semestres ($x = 50$),
 - iii) vous embauchez une personne à taux plein pendant le semestre d'été et personne pendant le semestre d'hiver ($x = 0$).

Quelle solution choisissez-vous ? Pouvez-vous expliquer ce résultat ?

Remarque : pour le calcul de la VAN, nous vous demandons de spécifier explicitement les flux liés au démarrage du projet, à l'exploitation du projet (CFAI et CF) ainsi que les flux liés à la liquidation du projet.

Avant de déterminer les flux liés à l'exploitation du projet notons que :

- **le flux lié au démarrage du projet est égal à -350'000 CHF,**
- **le flux lié à la liquidation du projet est égal à 167'500 CHF, c'est-à-dire 175'000-7'500 où les 7'500 représentent les impôts, c'est-à-dire $30\% \cdot 25'000$. Les 25'000 représentent le bénéfice de la vente c'est-à-dire $175'000 - (250'000 - 4 \cdot 25'000)$.**

		un travailleur à temps plein					
		flux d'exploitation					
		1	2	3	4	5	
		semestre d'hiver 2013	semestre d'été 2013	semestre d'hiver 2014	semestre d'été 2014	semestre d'hiver 2015	
	loyer	6 000	6 000	6 000	6 000		
	coûts d'entretien et de fonctionnement	4 000	4 500	4 000	4 500		
	ammortissement	25 000	25 000	25 000	25 000		
	BFR	1 000	1 200	1 400	1 800		
	quantité de bouquets vendus par une personne à temps plein	1 000	5 000	1 000	5 000		
	prix unitaire moyen d'un bouquet	40	50	40	50		
	coût d'approvisionnement des fleurs pour un bouquet	20	5	20	5		
	CA pour une personne à temps plein	20 000	225 000	20 000	225 000		
	CA total (gérant + employé)	40 000	450 000	40 000	450 000		
	saire pour un temps plein	30 000	30 000	30 000	30 000		
	charges salariales si <=80%	-	-	-	-		
	charges salariales si >80%	12 000	12 000	12 000	12 000		
	salaires nets totaux	42 000	42 000	42 000	42 000		
	CFAI	- 12 000	397 500	- 12 000	397 500		
	impôts	-	111 750	-	111 750		
	ΔBFR	1 000	200	200	400	- 1 800	
	CF	- 13 000	285 550	- 12 200	285 350	1 800	
	CF actualisé	- 10 000	168 964	- 5 553	99 909	485	
	0	1	2	3	4	5	
	CF	- 350 000	- 13 000	285 550	- 12 200	285 350	169 300
	CF actualisés	- 350 000	- 12 871	279 924	- 11 841	274 216	161 083
VAN		340 510					

		un travailleur à 50% les deux semestres				
		flux d'exploitation				
		1	2	3	4	5
		semestre d'hiver 2013	semestre d'été 2013	semestre d'hiver 2014	semestre d'été 2014	semestre d'hiver 2015
	loyer	6 000	6 000	6 000	6 000	
	coûts d'entretien et de fonctionnement	4 000	4 500	4 000	4 500	
	ammortissement	25 000	25 000	25 000	25 000	
	BFR	1 000	1 200	1 400	1 800	
	quantité de bouquets vendus par une personne à temps plein	1 000	5 000	1 000	5 000	
	prix unitaire moyen d'un bouquet	40	50	40	50	
	coût d'approvisionnement des fleurs pour un bouquet	20	5	20	5	
	CA pour une personne à temps plein	20 000	225 000	20 000	225 000	
	CA total (gérant + employé)	30 000	337 500	30 000	337 500	
	saire pour un temps plein	30 000	30 000	30 000	30 000	
	charges salariales si <=80%	-	-	-	-	
	charges salariales si >80%	12 000	12 000	12 000	12 000	
	salaires nets totaux	15 000	15 000	15 000	15 000	
	CFAI	5 000	312 000	5 000	312 000	
	impôts	-	86 100	-	86 100	
	ΔBFR	1 000	200	200	400	- 1 800
	CF	4 000	225 700	4 800	225 500	1 800
	CF actualisé	3 077	133 550	2 185	78 954	485
	0	1	2	3	4	5
CF	- 350 000	4 000	225 700	4 800	225 500	169 300
CF actualisés	- 350 000	3 960	221 253	4 659	216 701	161 083
VAN	257 656					

		un travailleur à 0% en hiver et à 100% en été				
		flux d'exploitation				
		1	2	3	4	5
		semestre d'hiver 2013	semestre d'été 2013	semestre d'hiver 2014	semestre d'été 2014	semestre d'hiver 2015
	loyer	6 000	6 000	6 000	6 000	
	coûts d'entretien et de fonctionnement	4 000	4 500	4 000	4 500	
	ammortissement	25 000	25 000	25 000	25 000	
	BFR	1 000	1 200	1 400	1 800	
	quantité de bouquets vendus par une personne à temps plein	1 000	5 000	1 000	5 000	
	prix unitaire moyen d'un bouquet	40	50	40	50	
	coût d'approvisionnement des fleurs pour un bouquet	20	5	20	5	
	CA pour une personne à temps plein	20 000	225 000	20 000	225 000	
	CA total (gérant + employé)	20 000	450 000	20 000	450 000	
	salaires pour un temps plein	30 000	30 000	30 000	30 000	
	charges salariales si <=80%	-	-	-	-	
	charges salariales si >80%	12 000	12 000	12 000	12 000	
	salaires nets totaux	-	42 000	-	42 000	
	CFAI	10 000	397 500	10 000	397 500	
	impôts	-	111 750	-	111 750	
	ΔBFR	1 000	200	200	400	- 1 800
	CF	9 000	285 550	9 800	285 350	1 800
	CF actualisé	6 923	168 964	4 461	99 909	485
	0	1	2	3	4	5
CF	- 350 000	9 000	285 550	9 800	285 350	169 300
CF actualisés	- 350 000	8 911	279 924	9 512	274 216	161 083
VAN	383 645					

C'est lorsque que $x = 0$ que la VAN est la plus importante.

2. **(4 points)** Etant donné qu'il n'y a pas de charges salariales tant que le taux d'embauche semestriel est inférieur ou égal à 80%, il peut être intéressant d'embaucher quelqu'un à 80% en été et à 20% en hiver. Calculez la VAN dans ce cas. Cette distribution du temps de travail est-elle intéressante ?

		un travailleur à 20% en hiver et à 80% en été				
		flux d'exploitation				
		1	2	3	4	5
		semestre d'hiver 2013	semestre d'été 2013	semestre d'hiver 2014	semestre d'été 2014	semestre d'hiver 2015
	loyer	6 000	6 000	6 000	6 000	
	coûts d'entretien et de fonctionnement	4 000	4 500	4 000	4 500	
	ammortissement	25 000	25 000	25 000	25 000	
	BFR	1 000	1 200	1 400	1 800	
	quantité de bouquets vendus par une personne à temps plein	1 000	5 000	1 000	5 000	
	prix unitaire moyen d'un bouquet	40	50	40	50	
	coût d'approvisionnement des fleurs pour un bouquet	20	5	20	5	
	CA pour une personne à temps plein	20 000	225 000	20 000	225 000	
	CA total (gérant + employé)	24 000	405 000	24 000	405 000	
	salaires pour un temps plein	30 000	30 000	30 000	30 000	
	charges salariales si ≤80%	-	-	-	-	
	charges salariales si >80%	12 000	12 000	12 000	12 000	
	salaires nets totaux	6 000	24 000	6 000	24 000	
	CFAI	8 000	370 500	8 000	370 500	
	impôts	-	103 650	-	103 650	
	ΔBFR	1 000	200	200	400	- 1 800
	CF	7 000	266 650	7 800	266 450	1 800
	CF actualisé	5 385	157 781	3 550	93 292	485
	0	1	2	3	4	5
CF	- 350 000	7 000	266 650	7 800	266 450	169 300
CF actualisés	- 350 000	6 931	261 396	7 571	256 053	161 083
VAN	343 034					

Le calcul de la VAN nous dit qu'employer quelqu'un à 80% l'été et à 20% l'hiver est moins intéressant que d'employer quelqu'un à 100% en été et à 0% en hiver.

Exercice 2 (20 points)

On considère une économie avec deux actifs risqués, les actifs A et B présentant les caractéristiques suivantes :

	rendement espéré	écart type
action A	10%	18%
action B	3%	3%

Questions :

Dans les questions 1, 2 et 3, nous supposons qu'il n'est pas possible d'avoir des positions négatives sur les actifs.

1. **(6 points)** On suppose que $\rho_{A,B} = -1$.

Déterminez l'ensemble des portefeuilles à variance minimale ainsi que le portefeuille à variance minimale globale.

Existe-t-il un actif sans risque dans ce cas ? Si oui, donnez ses caractéristiques. Comment l'obtient-on ?

En faisant le moins de calculs possibles, déterminez l'ensemble des portefeuilles efficients ainsi que la composition du portefeuille de tangence.

On suppose qu'il existe un investisseur ayant des préférences moyenne-variance et un coefficient d'aversion absolue au risque $\alpha = 2$. Déterminez son portefeuille optimal.

Représentez sur un graphique dans le plan (σ, μ) les cinq portefeuilles mentionnés en gras dans cette question.

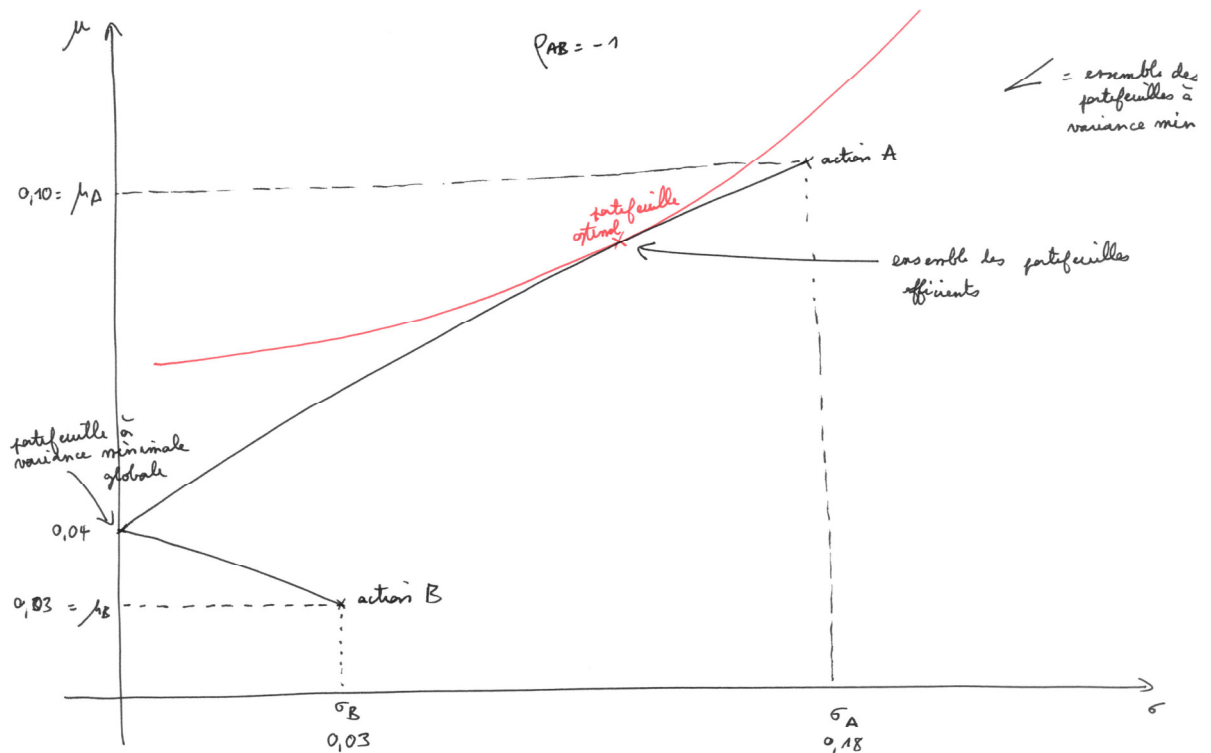
Si $\rho_{A,B} = -1$, on a vu en cours que l'ensemble des portefeuilles à variance minimale est l'union de deux droites d'équations $\sigma_P = \left| \frac{\mu_P(\sigma_A + \sigma_B) - (\mu_A\sigma_B + \mu_B\sigma_A)}{\mu_A - \mu_B} \right|$, c'est-à-dire $\sigma_P = \frac{\mu_P(\sigma_A + \sigma_B) - (\mu_A\sigma_B + \mu_B\sigma_A)}{\mu_A - \mu_B}$, si $\mu_P > \frac{\mu_A\sigma_B + \mu_B\sigma_A}{\sigma_A + \sigma_B}$ et $\sigma_P = -\frac{\mu_P(\sigma_A + \sigma_B) - (\mu_A\sigma_B + \mu_B\sigma_A)}{\mu_A - \mu_B}$, si $\mu_P < \frac{\mu_A\sigma_B + \mu_B\sigma_A}{\sigma_A + \sigma_B}$.

Avec nos valeurs, cela donne $\sigma_P = 3\mu_P - 0.12$ si $\mu_P > 0.04$ et $\sigma_P = -3\mu_P + 0.12$ si $\mu_P < 0.04$.

Le portefeuille à variance minimale globale est le portefeuille parmi les portefeuilles à variance minimale qui a le plus petit écart type. Dans le cas où les deux actions ont un coefficient de corrélation égal à -1, le portefeuille à variance minimale globale est sans risque. Il a un rendement attendu tel que $\sigma_g = 0$, c'est-à-dire $\mu_g = 0.04$. Il est donc possible d'obtenir l'actif sans risque en combinant les actions A et B, en proportion $\frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} = 14.29\%$ dans l'action A, et $1 - \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} = 85.71\%$ dans l'action B.

Rappelons-nous comment nous avons obtenu les portefeuilles efficients : ils sont obtenus en combinant l'actif sans risque et le portefeuille de tangence, ce dernier étant choisi afin de maximiser la pente de la droite de portefeuilles efficients. Dans ce cas, les portefeuilles efficients sont donc la droite reliant l'actif sans risque et l'action A, et le portefeuille de tangence peut donc être n'importe quel portefeuille de cette droite.

On est donc dans le cas d'un actif sans risque et d'un actif risqué, et la composition du portefeuille optimal est donnée par $\frac{\mu_A - r_f}{\alpha\sigma_A^2} = 92.59\%$ d'action A et 7.41% d'actif sans risque.



2. (4.5 points) On suppose que $\rho_{A,B} = 1$.

Déterminez l'ensemble des portefeuilles à variance minimale ainsi que le portefeuille à variance minimale globale.

On suppose qu'il existe un actif sans risque avec un rendement $r_f = 4\%$.

En faisant le moins de calculs possibles, déterminez l'ensemble des portefeuilles efficients ainsi que la composition du portefeuille de tangence.

On suppose qu'il existe un investisseur ayant des préférences moyenne-version et un coefficient d'aversion absolue au risque $a = 2$. Déterminez son portefeuille optimal.

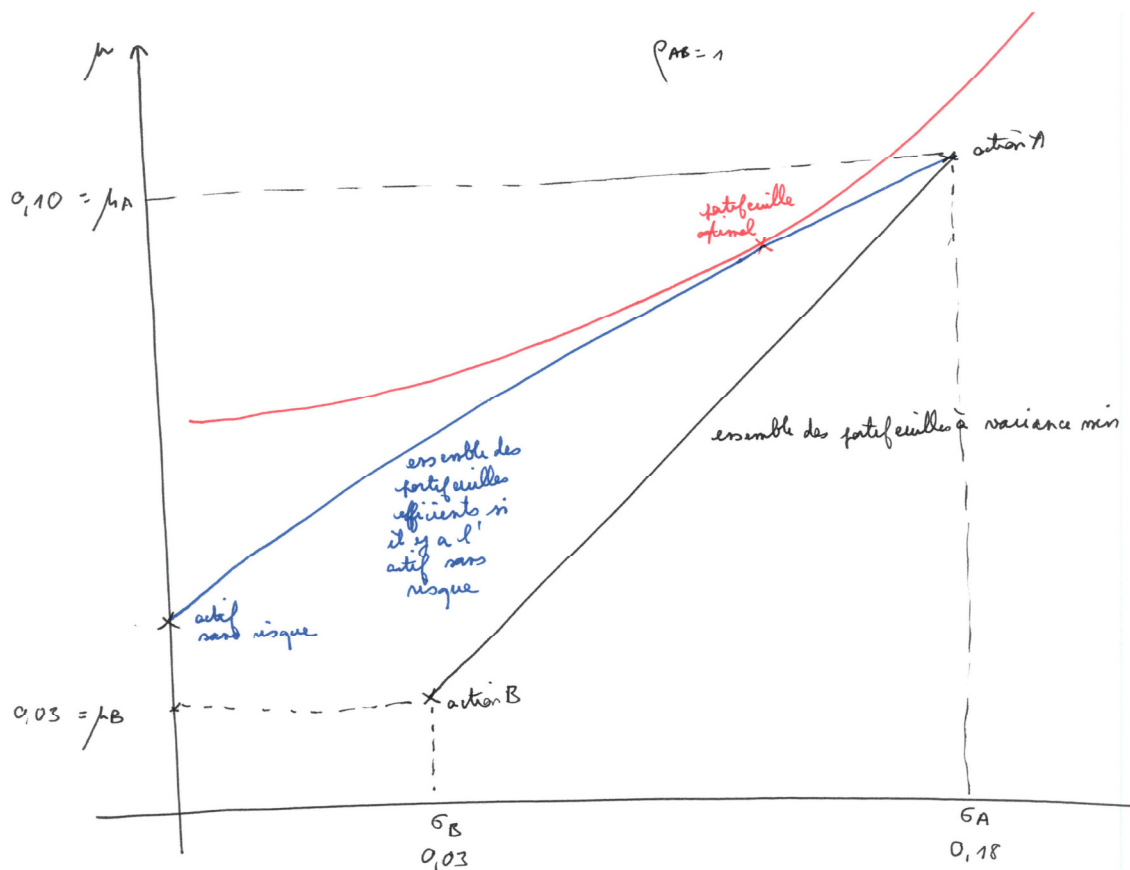
Représentez sur un graphique dans le plan (σ, μ) les cinq portefeuilles mentionnés en gras dans cette question.

Si $\rho_{A,B} = 1$, on a vu en cours que l'ensemble des portefeuilles à variance minimale est une droite d'équation $\mu_P = (\mu_A - \mu_B) \frac{\sigma_P - \sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B} + \mu_B$. Avec nos valeurs, cela donne $\mu_P = 0.4667\sigma_P + 0.016$.

Dans le cas où les deux actions ont un coefficient de corrélation égal à 1, le portefeuille à variance minimale globale est le portefeuille avec l'écart type le plus faible, c'est-à-dire l'action B. Il a un rendement attendu $\mu_g = 0.03$ et un écart type $\sigma_g = 0.03$.

S'il existe un actif sans risque, l'ensemble des portefeuilles efficients lie l'actif sans risque avec l'action A, afin de maximiser la pente de cet ensemble. Le portefeuille de tangence est donc composé à 100% d'action A.

On est donc dans le cas d'un actif sans risque et d'un actif risqué, et la composition du portefeuille optimal est donnée par $\frac{\mu_A - r_f}{a\sigma_A^2} = 92.59\%$ d'action A et 7.41% d'actif sans risque.



3. (1 point) Comparez les résultats obtenus aux questions 1 et 2. Que pouvez-vous dire ?

Une fois que l'actif sans risque est introduit dans l'économie (ayant le même niveau avec le taux sans risque du point 1), les deux cas sont identiques. En effet, l'action B est abandonnée (quand la corrélation est parfaite, négative ou positive), car elle ne permet pas de diversifier le risque systématique.

4. (4 points) On suppose maintenant et jusqu'à la fin de cet exercice que $\rho_{A,B} = 0$, et que l'actif sans risque qui est présent dans l'économie a un rendement $r_f = 2\%$.

Déterminez l'ensemble des portefeuilles efficients, la composition du portefeuille de tangence ainsi que son rendement attendu et son écart type.

On suppose qu'il existe un investisseur ayant des préférences moyenne-variance et un coefficient d'aversion absolue au risque $a = 2$. Déterminez son portefeuille optimal, le rendement attendu et la volatilité de ce portefeuille sachant que des positions négatives sur les actifs financiers sont autorisées.

L'ensemble des portefeuilles efficients est la droite qui lie l'actif sans risque au portefeuille de tangence. La composition du portefeuille de tangence est donnée par $w_T = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbf{1})}{B - Ar_f}$,

avec $\mu = \begin{bmatrix} \mu_A \\ \mu_B \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & 0 \\ 0 & \sigma_B^2 \end{bmatrix}$, $A = \mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1} = 1141.98$, $B = \mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mu = 36.4198$ et $C = \mu'\Sigma^{-1}\mu = 1.3086$. Ainsi $w_T = [18.18\%, 81.82\%]$. Le portefeuille de tangence est composé à 18.18%

d'action A et à 81.82% d'action B.

L'équation de l'ensemble des portefeuilles efficaces est $\mu = \frac{\mu_T - r_f}{\sigma_T} \sigma + r_f$ où $\mu_T = \frac{C - Br_f}{B - Ar_f} =$

4.27% et $\sigma_T = \sqrt{\frac{C - 2Br_f + Ar_f^2}{(B - Ar_f)^2}} = 4.097\%$. Ainsi l'équation de la droite est $\mu = 0.5556 \sigma +$

0.02.

La composition du portefeuille optimal est donnée par $w_t = \frac{\mu_T - r_f}{2\sigma_T^2} = 6.7901$. Le portefeuille optimal de cet investisseur a donc une proportion de 6.7901 dans le portefeuille de tangence et de -5.7901 dans l'actif sans risque. Etant donnée la composition du portefeuille de tangence, ce portefeuille optimal est composé d'actions A en proportion 1.2346, d'actions B en proportion 5.5556 et de l'actif sans risque en proportion -5.7901. Ce portefeuille optimal a un rendement espéré, $(1 - w_t)r_f + w_t\mu_T$, égal à 0.1743 et un écart type, $w_t\sigma_T$, égal à 0.2778.

5. **(4.5 points)** Déterminez l'écart type du portefeuille efficace P_1 qui a un rendement espéré $\mu_1 = 8\%$.

Déterminez l'écart type du portefeuille P_2 (composé d'action A, d'action B et d'actif sans risque) qui a le même risque systématique que le portefeuille P_1 (en termes de variance) et dont ce risque systématique (en termes de variance) représente 70% du risque total (en termes de variance). Si ce portefeuille satisfait le CAPM, quel est son rendement attendu ? Quel est le rendement attendu du portefeuille efficace P_3 ayant le même risque total que le portefeuille P_2 ?

Le portefeuille P_1 est efficace, il est donc sur la CML. Ainsi, si son rendement espéré est $m = 8\%$, son écart type est obtenu par $\sigma_A = \frac{\mu - r_f}{\mu_T - r_f} \sigma_T = 10.8\%$.

Le risque systématique du portefeuille P_2 est $(\rho_{P_2T}^2) \sigma_{P_2}^2 = 0.108^2$. Comme le risque systématique représente 70% du risque total (en termes de variance), on a $\rho_{P_2T}^2 = 0.7$. Il s'ensuit que $\sigma_{P_2} = 12.91\%$.

Le rendement attendu du portefeuille P_2 est déterminé par le CAPM $\mu_j = r_f + (\mu_T - r_f) \rho_{P_2T} \frac{\sigma_{P_2}}{\sigma_T} = 8\%$ (c'est normal, les 2 actifs ont le même risque systématique).

Sachant que $\mu = \frac{\mu_T - r_f}{\sigma_T} \sigma + r_f$, on en déduit que $\mu_{P_3} = 9.15\%$.

Exercice 3 (20 points)

Nous sommes le 1^{er} janvier 2'050. L'entreprise AirTrain SA est spécialisée dans la fabrication d'avions à remorque, une invention qui a révolutionné le transport aérien. En bref, les avions peuvent maintenant transporter une, voire deux, remorques, ce qui augmente considérablement le nombre de passagers.

AirTrain SA a une dette dont la valeur nominale est de 4 millions de francs, sur laquelle elle paie des intérêts de 5% par an. AirTrain SA réalise un bénéfice annuel moyen avant intérêts et impôts (EBIT) de 800'000 francs.

Dans cette économie, il y a 3 taux d'imposition. Le taux d'imposition sur les bénéfices des entreprises (t_c) est de 20%. Le taux d'imposition sur les dividendes payés aux actionnaires (t_{div}) est de 30%. Finalement, le taux d'imposition sur les rachats d'actions (t_{pv}) est de 40%. Comme c'était le cas pendant le cours, les impôts sur les dividendes et les rachats d'actions sont retenus à la source par l'entreprise. Par exemple, si l'entreprise a 200 francs de bénéfice net à distribuer et si elle choisit de distribuer 100 francs comme dividendes et 100 francs comme rachat d'actions, seulement 70 francs seront versés comme dividendes et seulement 60 francs comme rachat d'actions. Le reste ($30 + 40 = 70$ francs) est versé directement au fisc.

A la fin de chaque année, AirTrain SA distribue 50% de ses bénéfices nets sous forme de dividendes et utilise les 50% restants pour racheter des actions. Le dividende est payé juste avant le rachat d'actions. Le taux de rendement demandé par les actionnaires (r_E) est de 8%. Aujourd'hui, 1^{er} janvier 2'050, le paiement de dividendes et le rachat d'actions viennent juste d'avoir lieu. Le nombre d'actions restantes sur le marché est de 100.

1. A partir du bénéfice annuel moyen avant intérêts et impôts (EBIT), calculez le bénéfice net à distribuer aux actionnaires (avant de déduire les impôts sur dividendes t_{div} et sur les rachats d'actions t_{pv}), en remplissant le tableau suivant. **(2 points)**

<i>EBIT</i>	
<i>Intérêts</i>	
<i>Bénéfice avant impôts</i>	
<i>Impôts sur bénéfice</i>	
<i>Bénéfice net</i>	

<i>EBIT</i>	<i>800'000</i>
<i>Intérêts</i>	<i>200'000</i>
<i>Bénéfice avant impôts</i>	<i>600'000</i>

<i>Impôts sur bénéfice</i>	120'000
<i>Bénéfice net</i>	480'000

2. A partir du résultat précédent, calculez le bénéfice net d'impôts sur dividendes t_{div} et d'impôts sur les rachats d'actions t_{pv} . Quel est le bénéfice distribué par action ? Quel est le cours des actions d'AirTrain SA aujourd'hui ? **(3 points)**

Réponse :

Le montant brut distribué comme dividendes est $480'000 \cdot 50\% = 240'000$
 Net d'impôts on obtient $240'000(1 - 0.3) = 168'000$

Le montant distribué par rachat d'actions est $480'000 \cdot 50\% = 240'000$
 Net d'impôts on obtient $240'000(1 - 0.4) = 144'000$

Le bénéfice total net d'impôts distribué aux actionnaires est $168'000 + 144'000 = 312'000$

Le bénéfice par action est donc $\frac{312'000}{100} = 3'120CHF$

Le cours de chaque action est de $P_0 = \frac{3'120}{0.08} = 39'000CHF$

3. Calculez le cours des actions avant paiement du dividende, le montant du dividende net par action, le nombre d'actions rachetées, et le cours des actions après le rachat à la fin 2'050 et à la fin 2'051. **(4 points)**

Réponse :

Durant l'année, la valeur totale des fonds propres sur le marché augmente du montant du bénéfice qui reviendra aux actionnaires, soit 312'000 CHF.

Fin 2'050

Le cours des actions avant le paiement du dividende est de $39'000 + \frac{312'000}{100} = 42'120$. Le dividende net par action est de $\frac{168'000}{100} = 1'680 CHF$. Le cours des actions après paiement des dividendes vaut donc $42'120 - 1'680 = 40'440$. Ceci signifie que l'entreprise peut racheter $\frac{144'000}{40'440} = 3.56$ actions. Il reste sur le marché 96.44 actions. Le cours d'actions après rachat reste inchangé à 40'440 CHF.

Fin 2'051

Le cours des actions avant le paiement du dividende est de $40'440 + \frac{312'000}{96.44} = 43'675.2 CHF$. Le dividende net par action est de $\frac{168'000}{96.44} = 1'742.03 CHF$. Le cours des actions après paiement des dividendes vaut donc $43'675.2 - 1'742.03 = 41'933.17$. Ceci signifie que l'entreprise peut racheter $\frac{144'000}{41'933.17} = 3.43$ actions. Il reste sur le marché 93 actions. Le cours d'actions après rachat reste inchangé à 41'933.17 CHF.

On reprend tout depuis le début avec un nouveau scénario. Une grave récession frappe par surprise toute la planète. Le transport aérien va aussi souffrir, y compris AirTrain SA. Le bénéfice annuel moyen avant impôts de l'entreprise (EBIT) chute à 600'000 francs par an. On s'attend à ce qu'il demeure à ce niveau dorénavant.

Etant donné que le taux d'imposition sur les rachats d'actions est plus grand que celui sur les dividendes, AirTrain SA décide de verser plus de dividendes. A la fin de chaque année, AirTrain SA distribue 90% de ses bénéfices nets sous forme de dividendes et utilise les 10% restants pour racheter des actions.

Aujourd'hui, 1^{er} janvier 2'050, le paiement de dividendes et le rachat d'actions viennent juste d'avoir lieu. Le nombre d'actions restantes sur le marché est de 100.

4. A partir du bénéfice annuel moyen avant intérêts et impôts (EBIT), calculez le bénéfice net à distribuer aux actionnaires (avant de déduire les impôts sur dividendes t_{div} et sur les rachats d'actions t_{pv}), en remplissant le tableau suivant. **(2 points)**

<i>EBIT</i>	
<i>Intérêts</i>	
<i>Bénéfice avant impôts</i>	
<i>Impôts sur bénéfice</i>	
<i>Bénéfice net</i>	

<i>EBIT</i>	<i>600'000</i>
<i>Intérêts</i>	<i>200'000</i>
<i>Bénéfice avant impôts</i>	<i>400'000</i>
<i>Impôts sur bénéfice</i>	<i>80'000</i>
<i>Bénéfice net</i>	<i>320'000</i>

5. A partir du résultat précédent, calculez le bénéfice net d'impôts sur dividendes t_{div} et d'impôts sur les rachats d'actions t_{pv} . Quel est le bénéfice distribué par action ? Quel est le cours des actions d'AirTrain SA aujourd'hui ? **(3 points)**

Réponse :

Le montant brut distribué comme dividendes est $320'000 \cdot 90\% = 288'000$

Net d'impôts on obtient $288'000(1 - 0.3) = 201'600$

Le montant distribué par rachat d'actions est $320'000 \cdot 10\% = 32'000$

Net d'impôts on obtient $32'000(1 - 0.4) = 19'200$

Le bénéfice total net d'impôts distribué aux actionnaires est $201'600 + 19'200 = 220'800$

Le bénéfice par action est donc $\frac{220'800}{100} = 2'208\text{CHF}$

Le cours de chaque action est de $P_0 = \frac{2'208}{0.08} = 27'600\text{CHF}$

6. Calculez le cours des actions avant paiement du dividende, le montant du dividende net par action, le nombre d'actions rachetées, et le cours des actions après le rachat à la fin 2'050 et à la fin 2'051. **(4 points)**

Réponse :

Durant l'année, la valeur totale des fonds propres sur le marché augmente du montant du bénéfice qui reviendra aux actionnaires, soit 220'800 CHF.

Fin 2'050

Le cours des actions avant le paiement du dividende est de $27'600 + \frac{220'800}{100} = 29'808$. Le dividende net par action est de $\frac{201'600}{100} = 2'016\text{ CHF}$. Le cours des actions après paiement des dividendes vaut donc $29'808 - 2'016 = 27'792$. Ceci signifie que l'entreprise peut racheter $\frac{19'200}{27'792} = 0.69$ actions. Il reste sur le marché 99.31 actions. Le cours d'actions après rachat reste inchangé à 27'792 CHF.

Fin 2'051

Le cours des actions avant le paiement du dividende est de $27'792 + \frac{220'800}{99.31} = 30'015.36$. Le dividende net par action est de $\frac{201'600}{99.31} = 2'030.02\text{ CHF}$. Le cours des actions après paiement des dividendes vaut donc $30'015.36 - 2'030.02 = 27'985.34$. Ceci signifie que l'entreprise peut racheter $\frac{19'200}{27'985.34} = 0.69$ actions. Il reste sur le marché 98.62 actions. Le cours d'actions après rachat reste inchangé à 27'985.34 CHF.

7. Afin d'augmenter la valeur de l'entreprise AirTrain SA, vous proposez (une seule réponse est juste, pas de justification nécessaire) :
- Ne faire que du rachat d'actions
 - Distribuer le bénéfice intégralement sous forme de dividendes
 - Revenir à la politique de distribution d'avant (50% dividendes et 50% rachat d'actions) **(2 points)**

Réponse : b

Exercice 4 (30 points)

Senior Entreprise HEC (SEHEC) a été fondée en 2008 par des anciens membres de la Junior Entreprise de la faculté des HEC Lausanne (JEHEC). Alors que JEHEC est spécialisée dans le service aux entreprises, SEHEC est spécialisée dans le commerce des boissons alcoolisées et du tabac. Les actions de SEHEC valent actuellement 300 CHF sur le marché. D'une année à l'autre, leur cours peut soit augmenter de 25%, soit baisser de 20%. Le taux d'intérêt de l'actif sans risque est de 7% par an.

Une option Call Asiatique est une option de type européen donnant droit à son détenteur de recevoir à l'échéance la différence positive éventuelle entre la moyenne arithmétique des cours du sous-jacent et le prix d'exercice. Le but de cet exercice est d'évaluer une option Call Asiatique sur l'action SEHEC avec un prix d'exercice de K et une maturité de deux ans. Le payoff de cette option est :

$$\text{Payoff Call Asiatique} = \max \left[\frac{1}{3} \sum_{t=0}^2 S_t - K, 0 \right]$$

Dans cette formule, S_t représente le prix de l'actif au temps t . La moyenne arithmétique $\frac{1}{3} \sum_{t=0}^2 S_t$ est calculée à partir de l'historique des prix du sous-jacent jusqu'à l'échéance (aux temps 0, 1 et 2).

1. Quel est le payoff de l'option Call Asiatique dans le cas uu (c.-à-d. le sous-jacent augmente deux fois de suite) ? Quel est le payoff de l'option Call Asiatique dans le cas ud (c.-à-d. le sous-jacent augmente et ensuite descend) ? Quel est le payoff de l'option Call Asiatique dans le cas du (c.-à-d. le sous-jacent descend et ensuite augmente) ? Quel est le payoff de l'option Call Asiatique dans le cas dd (c.-à-d. le sous-jacent descend deux fois de suite) ? **(Note : Un arbre est dessiné sur la page suivante, dans lequel vous pourriez déjà remplir les prix du sous-jacent pour chaque cas). (2 points)**

Réponse : $\text{Payoff}_{f_{uu}} = \max \left[\frac{300+375+468.75}{3} - 270 \right] = 111.25 \text{ CHF}$

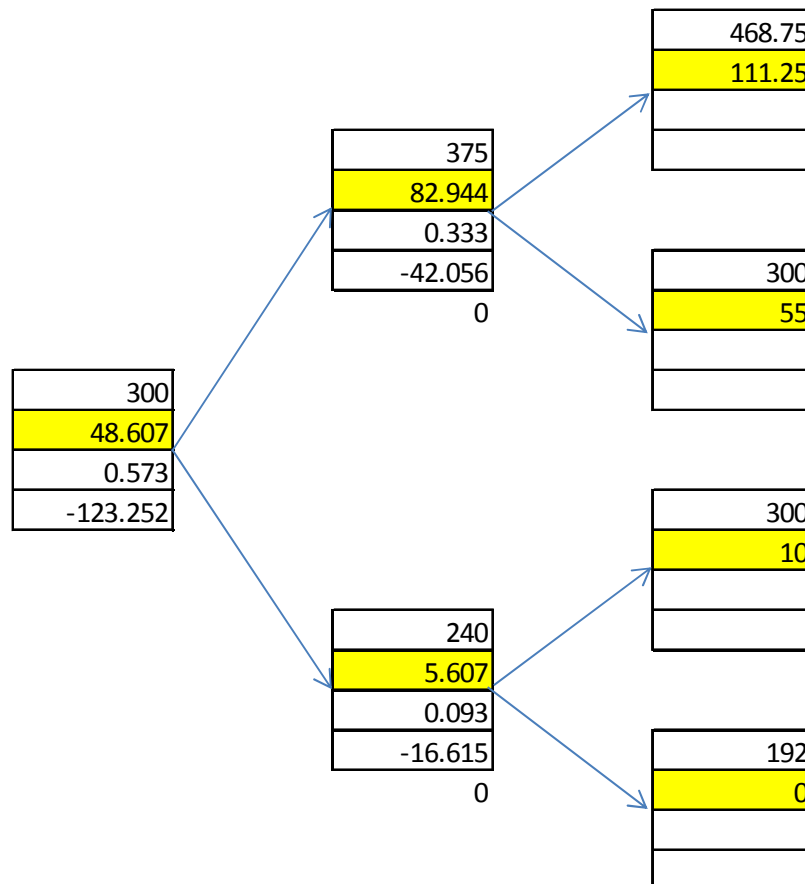
$$\text{Payoff}_{f_{ud}} = \max \left[\frac{300+375+300}{3} - 270 \right] = 55 \text{ CHF}$$

$$\text{Payoff}_{f_{du}} = \max \left[\frac{300+240+300}{3} - 270 \right] = 10 \text{ CHF}$$

$$\text{Payoff}_{f_{dd}} = \max \left[\frac{300+240+192}{3} - 270 \right] = 0 \text{ CHF}$$

2. Déterminez le prix aujourd'hui d'une option Call Asiatique sur l'action SEHEC avec un prix d'exercice de 270 CHF et une maturité de deux ans en utilisant la technique du portefeuille de réplication. Déterminez le portefeuille composé de l'action et de l'actif sans risque nécessaire pour répliquer cette option au cours du temps. Utilisez l'arbre ci-joint. Veuillez justifier vos réponses. **(Note : Etant donné que le payoff dépend de valeurs antérieures de S_t , l'arbre aura à la fin 4 valeurs possibles, et non pas 3 comme vous avez vu en cours. Par contre, la méthodologie traitée en cours reste la même).** (6 points)

Réponse :



On remplit l'arbre en partant de la fin, avec les formules vues en cours. Le prix de l'option Call Asiatique est $C_0 = 48.61$ CHF. Le portefeuille composé de l'action et de l'actif sans risque nécessaire pour répliquer cette option au cours du temps est représenté sur l'arbre.

Pour répliquer l'option en période 1 si le cours de l'action a monté, il faut acheter

$$\delta_1^u = \frac{C_2^{uu} - C_2^{ud}}{S_2^{uu} - S_2^{ud}} = 0.3333$$

action et placer un montant de

$$b_1^u = \frac{C_2^{uu} - \delta_1^u S_2^{uu}}{1 + r} = -42.06 \text{ CHF}$$

dans l'actif sans risque (c.-à-d. emprunter 42.06 CHF). La valeur de cette position en période 1 est de

$$C_1^u = 0.3333 \cdot 375 - 42.06 = 82.94 \text{ CHF}$$

Pour répliquer l'option en période 1 si le cours de l'action a baissé, il faut acheter

$$\delta_1^d = \frac{C_2^{du} - C_2^{dd}}{S_2^{du} - S_2^{dd}} = 0.0926$$

action et placer un montant de

$$b_1^d = \frac{C_2^{du} - \delta_1^d S_2^{du}}{1 + r} = -16.61 \text{ CHF}$$

dans l'actif sans risque (c.-à-d. emprunter 16.61 CHF). La valeur de cette position en période 1 est de

$$C_1^u = 0.0926 \cdot 240 - 16.61 = 5.61 \text{ CHF}$$

Pour répliquer l'option en période 0, il faut acheter

$$\delta_0 = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_1^u - S_1^d} = 0.5729$$

action et placer un montant de

$$b_0 = \frac{C_1^u - \delta_0 S_1^u}{1 + r} = -123.25 \text{ CHF}$$

dans l'actif sans risque (c.-à-d. emprunter 123.25 CHF). La valeur de cette position en période 1 est de

$$C_0 = 0.5729 \cdot 300 - 123.25 = 48.61 \text{ CHF}$$

3. Montrez que le portefeuille de réplcation obtenu sous (2) est autofinancé. **(2 points)**

Réponse : Pour montrer que le portefeuille est autofinancé, nous devons montrer que la modification de la composition du portefeuille en période 1 n'implique aucun retrait d'argent ni investissement supplémentaire.

La modification de la composition du portefeuille en période 1 si le cours de l'action est monté vaut :

$$(0.3333 - 0.5728)375 + (-42.05) - (-123.25)(1 + 0.07) = 0 \text{ CHF}$$

La modification de la composition du portefeuille en période 1 si le cours de l'action a baissé vaut :

$$(0.0926 - 0.5728)240 + (-16.61) - (-123.25)(1 + 0.07) = 0 \text{ CHF}$$

Le portefeuille de réplcation est donc autofinancé.

4. En utilisant le portefeuille de réplcation au temps 0, calculez le bêta de l'option Call Asiatique. Supposez que le bêta de l'actif sous-jacent est 2. **(2 points)**

Réponse : Le portefeuille de réplcation est composé de $\delta_0 = 0.5729$ actions et une position dans l'actif sans risque de $b_0 = -123.25$ CHF (emprunt). Le bêta du portefeuille, et donc de l'option, vaut :

$$\beta_{\text{Option}} = \frac{0.5729 \cdot 300}{48.61} \beta_{\text{Action}} = 7.07$$

5. Déterminez la probabilité risque-neutre (q) que l'action monte. Déterminez la probabilité risque neutre ($1 - q$) que l'action descende. Ensuite remplissez le tableau suivant. **(Note : Pour la colonne de gauche, veuillez remplir seulement les valeurs. Pour la colonne de droite, veuillez remplir la formule utilisée et la valeur obtenue; un résultat sans formule ne sera pas compté).** **(3 points)**

Réponse : La probabilité risque neutre vaut

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = 0.6$$

Et donc

$$1 - q = 0.4$$

Payoff de l'option Call Asiatique	Probabilité
$C_2^{uu} =$	$P_{r^{uu}} =$
$C_2^{ud} =$	$P_{r^{ud}} =$

$C_2^{du} =$	$P_{r^{du}} =$
$C_2^{dd} =$	$P_{r^{dd}} =$

Payoff de l'option Call Asiatique	Probabilité
$C_2^{uu} = 111.25 \text{ CHF}$	$P_{r^{uu}} = q^2 = 0.36$
$C_2^{ud} = 55 \text{ CHF}$	$P_{r^{ud}} = q(1 - q) = 0.24$
$C_2^{du} = 10 \text{ CHF}$	$P_{r^{du}} = (1 - q)q = 0.24$
$C_2^{dd} = 0 \text{ CHF}$	$P_{r^{dd}} = (1 - q)^2 = 0.16$

6. Déterminez le prix aujourd'hui de l'option Call Asiatique, en utilisant l'évaluation à l'aide des probabilités risque-neutre. Comparez avec la valeur obtenue sous (2). **(2 points)**

Réponse : On obtient comme valeur du Call Asiatique

$$C_0 = \frac{0.36 \cdot 111.25 + 0.24 \cdot 55 + 0.24 \cdot 10 + 0.16 \cdot 0}{(1 + 0.07)^2} = 48.61 \text{ CHF}$$

On peut noter que cette valeur correspond bien à celle de l'option calculée en (2).

Une option Put Asiatique est une option de type européen donnant droit à son détenteur de recevoir à l'échéance la différence positive éventuelle entre le prix d'exercice et la moyenne arithmétique des cours du sous-jacent. Nous allons évaluer une option Put Asiatique sur l'action SEHEC avec un prix d'exercice de K et une maturité de deux ans. Le payoff de cette option est :

$$\text{Payoff Put Asiatique} = \max \left[K - \frac{1}{3} \sum_{t=0}^2 S_t, 0 \right]$$

7. Déterminez le prix aujourd'hui d'une option Put Asiatique sur l'action SEHEC avec un prix d'exercice de 270 CHF et une maturité de deux ans. Utilisez la technique des probabilités risque-neutre. Commencez par remplir le tableau suivant. **(Note : Pour la colonne de gauche, veuillez remplir la formule utilisée et la valeur obtenue ; un résultat sans formule ne sera pas compté. Pour la colonne de droite, veuillez remplir seulement les valeurs).** **(5 points)**

Payoff de l'option Put Asiatique	Probabilité

$P_2^{uu} =$	$P_r^{uu} =$
$P_2^{ud} =$	$P_r^{ud} =$
$P_2^{du} =$	$P_r^{du} =$
$P_2^{dd} =$	$P_r^{dd} =$

Payoff de l'option Put Asiatique	Probabilité
$P_2^{uu} = \max \left[270 - \frac{300+375+468.75}{3} \right] = 0 \text{ CHF}$	$P_r^{uu} = 0.36$
$P_2^{ud} = \max \left[270 - \frac{300+375+300}{3} \right] = 0 \text{ CHF}$	$P_r^{ud} = 0.24$
$P_2^{du} = \max \left[270 - \frac{300+240+300}{3} \right] = 0 \text{ CHF}$	$P_r^{du} = 0.24$
$P_2^{dd} = \max \left[270 - \frac{300+240+192}{3} \right] = 26 \text{ CHF}$	$P_r^{dd} = 0.16$

On obtient comme valeur du Put Asiatique

$$C_0 = \frac{0.36 \cdot 0 + 0.24 \cdot 0 + 0.24 \cdot 0 + 0.16 \cdot 26}{(1 + 0.07)^2} = 3.63 \text{ CHF}$$

8. Considérez un actif exotique nommé Moyenne qui paie à l'échéance la moyenne arithmétique des cours du sous-jacent. Déterminez le prix aujourd'hui de l'actif Moyenne sur l'action SEHEC avec une maturité de deux ans. Utilisez la technique des probabilités risque-neutre. Commencez par remplir le tableau suivant. **(Note : Pour la colonne de gauche, veuillez remplir la formule utilisée et la valeur obtenue ; un résultat sans formule ne sera pas compté. Pour la colonne de droite, veuillez remplir seulement les valeurs). (5 points)**

Payoff de l'actif Moyenne	Probabilité
$M_2^{uu} =$	$P_r^{uu} =$
$M_2^{ud} =$	$P_r^{ud} =$
$M_2^{du} =$	$P_r^{du} =$
$M_2^{dd} =$	$P_r^{dd} =$

Payoff de l'actif Moyenne	Probabilité
$M_2^{uu} = \frac{300+375+468.75}{3} = 381.25 \text{ CHF}$	$Pr^{uu} = 0.36$
$M_2^{ud} = \frac{300+375+300}{3} = 325 \text{ CHF}$	$Pr^{ud} = 0.24$
$M_2^{du} = \frac{300+240+300}{3} = 280 \text{ CHF}$	$Pr^{du} = 0.24$
$M_2^{dd} = \frac{300+240+192}{3} = 244 \text{ CHF}$	$Pr^{dd} = 0.16$

On obtient comme valeur de l'actif Moyenne

$$M_0 = \frac{0.36 \cdot 381.25 + 0.24 \cdot 325 + 0.24 \cdot 280 + 0.16 \cdot 244}{(1 + 0.07)^2} = 280.80 \text{ CHF}$$

9. Trouvez une relation de parité (au temps 0) entre le Call Asiatique, le Put Asiatique, et l'actif Moyenne. Vérifiez si cette relation de parité est valable en remplaçant les résultats précédents. Utilisez la notation suivante :

- Call Asiatique au temps 0 : C_0
- Put Asiatique au temps 0 : P_0
- Actif Moyenne au temps 0 : M_0 **(3 points)**

Réponse : Nous savons qu'à la maturité :

$$C_2 - P_2 = \max \left[\frac{1}{3} \sum_{t=0}^2 S_t - K, 0 \right] - \max \left[K - \frac{1}{3} \sum_{t=0}^2 S_t, 0 \right] = \frac{1}{3} \sum_{t=0}^2 S_t - K = M_2 - K$$

Par conséquent, au temps 0 la relation suivante tient par l'absence d'opportunités d'arbitrage :

$$C_0 - P_0 = M_0 - \frac{K}{(1+r)^2}$$

Cette relation de parité est vérifiée avec les résultats précédents :

$$48.61 - 3.63 = 280.80 - \frac{270}{1.07^2} = 44.97$$