FACULTE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES DE L'UNIVERSITE DE LAUSANNE

Professeurs : **D. Andrei** **C. Bobtcheff**	**Matière :** **Principes généraux de finance**	**Session :** **Eté 2011**

Informations générales:

- Documentation autorisée.
- Calculatrices autorisées.
- Examen de 20 pages (page de titre comprise).
- Le nombre total de points est de 100.
- Prière de répondre directement dans les espaces prévus à cet effet. Sauf mention explicite à la question concernée, les feuilles de brouillon ne seront pas corrigées.

Nom et prénom	**No matricule**	**No de place**

Note finale: ....

Q1 : ....
Q2 : ....
Q3 : ....
Q4 : ....
Bonus : ....
Total : ....

****

Exercice I (25 points)

Le projet d'investissement suivant vous est proposé : extension d'une usine nécessitant un achat de matériel pour 20 millions de francs et des frais d'installation pour 1.5 millions de francs. La durée d'utilisation est de 6 ans.

Cette extension se ferait sur un terrain que vous possédez déjà et que vous louez actuellement à un entrepreneur pour 100'000 francs par an.

Le projet permettrait d'accroître l'excédent brut d'exploitation de 5 millions de francs la première année, ce montant augmenterait de 15% par an jusqu'à la fin du projet. Les coûts occasionnés par cette nouvelle activité s'élèveraient à 1 million de francs par an. Le BFR engendré par la nouvelle activité serait de 1.5 millions de francs par an à partir de $t = 1$ et jusqu'en $t = 6$. Le matériel serait amorti linéairement sur 5 ans. Il pourrait être revendu après les 6 ans d'exploitation, en $t = 7$, pour 1.5 millions de francs. La valeur résiduelle serait de 0.

Le taux de l'impôt sur les sociétés est de 40%. On suppose que les pertes ne sont pas imposables.

Le taux d'actualisation est de 10%.

Questions :

Pour répondre aux questions, nous vous recommandons de travailler avec des millions de francs comme unité.
Vous pouvez utiliser la grille pour répondre aux questions.

1. Déterminez les flux liés à l'investissement, ceux liés à l'exploitation du projet et enfin ceux liés à la liquidation du projet.

2. Calculez la VAN de ce projet d'investissement. Devez-vous l'entreprendre ?

Si vous attendiez un an pour entreprendre le projet d'extension, vous savez que l'excédent que vous pourriez retirer serait de 6 millions de francs (au lieu des 5 millions de francs) car vous pourriez utiliser une technologie plus efficace (sachant que cet excédent croîtrait toujours de 15% par an).

3. Devez-vous attendre pour entreprendre le projet ?

Note pour la correction des exercices (pour tout l'examen) : il est parfois possible que le résultat obtenu par les étudiants ne soit pas exactement le même, ceci dû à des approximations. Il faut donc être souple lors de la correction.

Questions 1 et 2 :
(20 points)

		0	1	2	3	4	5	6	7
2 pts	**flux lié à l'investissement**	-21,5							
	flux liés à l'exploitation du projet								
2 pts	excédent		5	5,75	6,61	7,60	8,75	10,06	
2 pts	coût d'opportunité		-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	
1 pt	autres coûts		-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1 pt	*CFAI*		*3,90*	*4,65*	*5,51*	*6,50*	*7,65*	*8,96*	
2 pts	amortissements		4	4	4	4	4	0	
1 pt	*impôts*		*0,00*	*0,26*	*0,61*	*1,00*	*1,46*	*3,58*	
1 pt	BFR		1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	
1 pt	∆BFR		1,5	0	0	0	0	0	-1,5
1 pt	*CF*		*2,40*	*4,39*	*4,91*	*5,50*	*6,19*	*5,37*	*1,50*
3 pts	**flux liés à la liquidation du projet**	le bénéfice de la vente est égal à son prix de vente puisque la valeur comptable est nulle, l'impôt est donc égal à 0,4*1,5=0,6							*0,9*
	CF	-21,5	2,40	4,39	4,91	5,50	6,19	5,37	2,40
	CF actualisés	-21,50	2,18	3,63	3,69	3,76	3,84	3,03	1,23
2 pts	***VAN***	***-0,14***							

La VAN engendrée par le projet est négative, il ne faut donc pas entreprendre ce projet d'extension. (1 pt)

Question 3 :

(5 pts)

	VAN vue de t=1								
		0	1	2	3	4	5	6	7
	flux lié à l'investissement	-21,5							
	flux liés à l'exploitation du projet								
1 pt	excédent		6	6,90	7,94	9,13	10,49	12,07	
	coût d'opportunité		-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	
	autres coûts		-1	-1	-1	-1	-1	-1	
	CFAI		*4,90*	*5,80*	*6,84*	*8,03*	*9,39*	*10,97*	
	amortissements		4	4	4	4	4	0	
	impôts		*0,36*	*0,72*	*1,13*	*1,61*	*2,16*	*4,39*	
	BFR		1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	
	ΔBFR		1,5	0	0	0	0	0	-1,5
	CF		*3,04*	*5,08*	*5,70*	*6,42*	*7,24*	*6,58*	*1,50*
	flux liés à la liquidation du projet	le bénéfice de la vente est égal à son prix de vente puisque la valeur comptable est nulle, l'impôt est donc égal à 0,4*1,5=0,6							*0,9*
1 pt	**CF**	-21,5	3,04	5,08	5,70	6,42	7,24	6,58	2,40
	CF actualisés	-21,50	2,76	4,20	4,28	4,38	4,49	3,71	1,23
1 pt	***VAN en t=1***	***3,57***							
1 pt	***VAN en t=0***	***3,24***							

Il vaut mieux attendre un an et la nouvelle technologie qui sera plus efficace pour faire l'extension. (1 pt)

Exercice II (25 points)

On considère une économie avec deux actifs risqués (actions 1 et 2) dont les rendements aléatoires sont $\tilde{r}_1$ et $\tilde{r}_2$, et un actif sans risque avec un rendement certain r_f.

Les caractéristiques des actifs sont les suivantes :

- $\mu_1 = 0.1$, σ_1 est inconnu,
- $\mu_2 = 0.18$, $\sigma_2 = 0.22$,
- $\rho_{12} = 0.3$,
- $r_f = 0.06$.

Questions :

1. Donnez l'équation de l'ensemble des portefeuilles efficients. Comment s'appelle cet ensemble ?

(1 pt)
Dans une économie avec N actifs risqués et un actif sans risque, l'ensemble des portefeuilles efficients est donné par la droite

$$\mu_P = r_f + \frac{\mu_T - r_f}{\sigma_T}\sigma_P. \ \textbf{(0.5 pt)}$$

Cette droite s'appelle la CML (Capital Market Line). (0.5 pt)

Le portefeuille de tangence a un rendement espéré $\mu_T = 0.16$ et un écart type $\sigma_T = 0.18$.

2. Déterminez la composition du portefeuille de tangence.
   Donnez l'équation qui permet de déterminer la valeur de σ_1.
   Résolvez cette équation et déterminez σ_1.

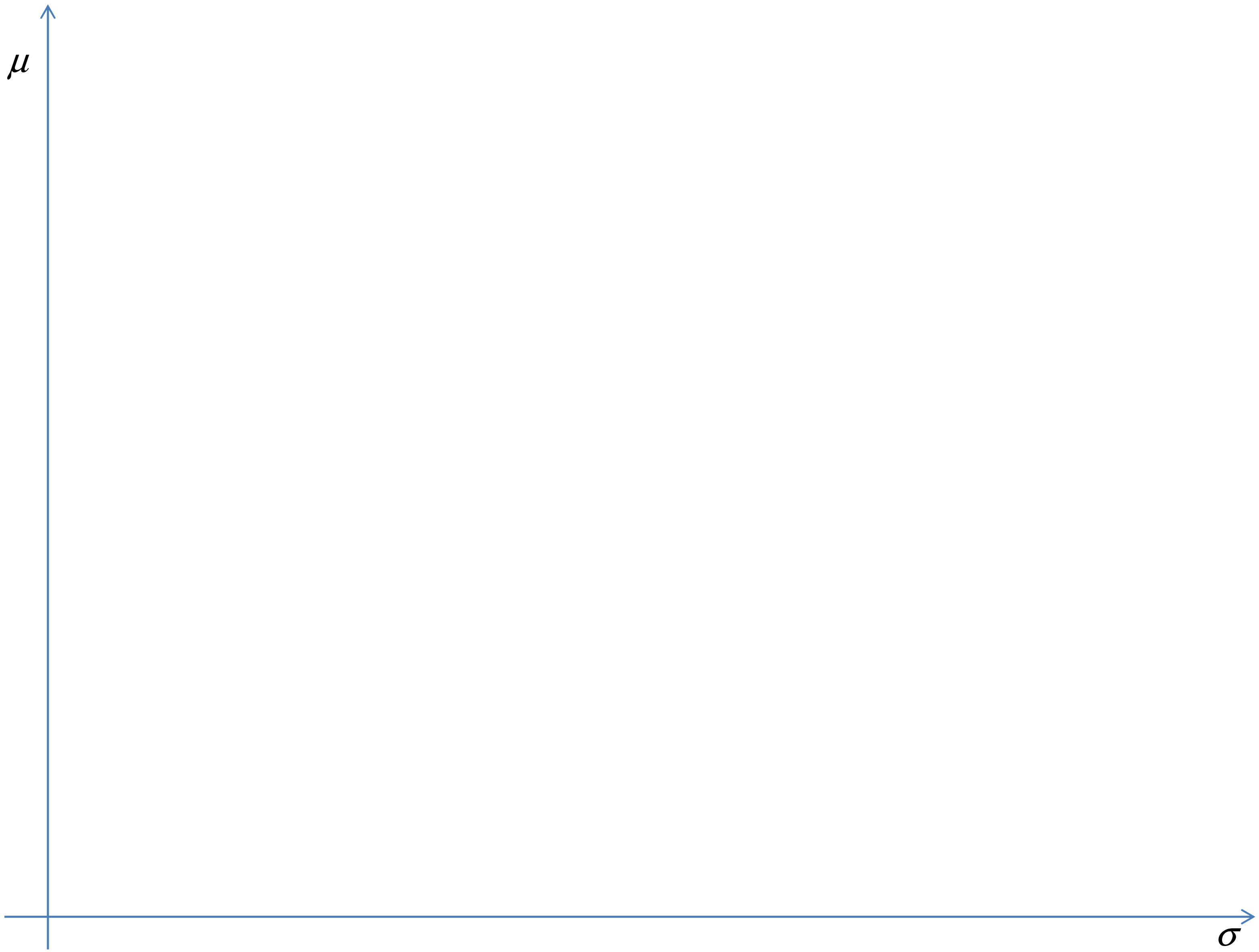
Rappel : les deux racines d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ où $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

(4 pts)
Le portefeuille de tangence est composé des actions 1 et 2. Soit w la proportion d'actions 1 et 1-w la proportion d'actions 2. On sait que $\mu_T = w\mu_1+(1-w)\mu_2$. (1 pt) On en déduit $w = \frac{\mu_T - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$ =0.25(0.5 pt). Le portefeuille de tangence est composé à 25% de l'action 1 et à 75% de l'action 2. (0.5 pt)
Pour déterminer σ_1, on écrit la variance du portefeuille de tangence :

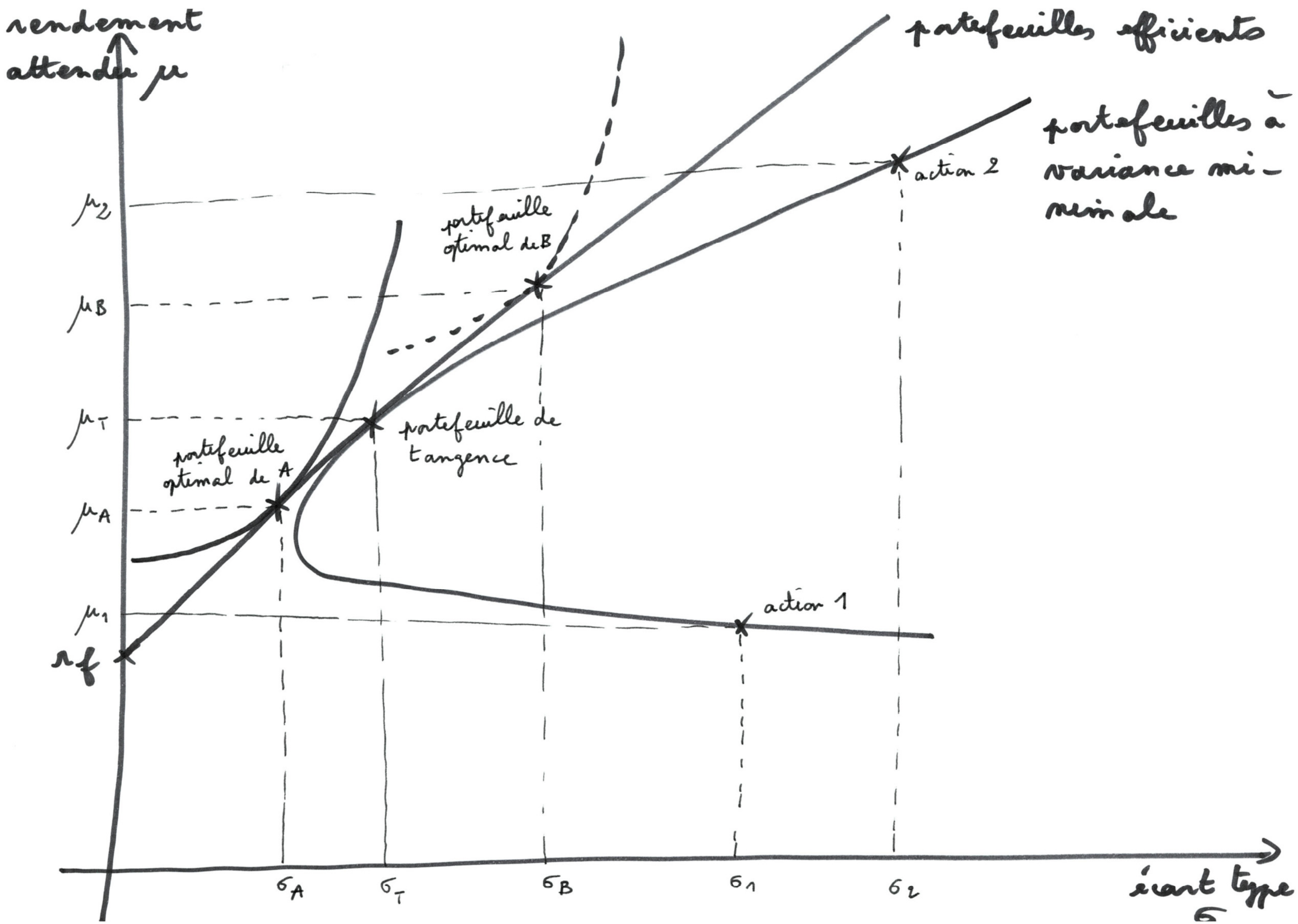
$$\sigma_T^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2. \textbf{(1 pt)}$$

Cette équation permet de déterminer σ_1. Les deux solutions sont -0.55 et 0.15. Nous retenons bien sûr $\sigma_1 = 0.15$. (1 pt)

3. Représentez sur un même graphique dans le plan *(σ, μ)* l'ensemble de portefeuilles à variance minimale et l'ensemble des portefeuilles efficients (un dessin main levée est suffisant) en supposant que l'achat et la vente à découvert sont autorisés.
   Placez sur ce graphique les actifs 1 et 2, l'actif sans risque ainsi que le portefeuille de tangence.
   Comment le graphique est-il modifié s'il n'est plus possible d'acheter et de vendre à découvert ?
   Attention : faites un graphique suffisamment grand et lisible et faites attention à bien placer les points les uns par rapport aux autres !



μ
σ


rendement attendu μ
portefeuilles efficients
portefeuilles à variance minimale
action 2
portefeuille optimal de B
portefeuille de tangence
portefeuille optimal de A
action 1
μ2
μB
μT
μA
μ1
rf
σA
σT
σB
σ1
σ2
écart type σ

(5 pts)
S'il n'est pas possible d'acheter ou de vendre à découvert, l'ensemble des portefeuilles à variance minimale s'arrête aux actions 1 et 2. De même, l'ensemble des portefeuilles efficients sera le segment rejoignant l'actif sans risque au portefeuille de tangence, et continue ensuite jusqu'au deuxième actif, par la ligne de variance minimale.
1 pt pour l'ensemble des portefeuilles à variance minimale
1 pt pour la CML
0.5 pt par actif (=1.5 pts)
0.5 pt si on a bien $\mu_1 > r_f$.
1 pt pour l'impossibilité d'acheter et de vendre à découvert.

On considère deux investisseurs *A* et *B* avec des préférences moyenne-variance, l'investisseur *A* présentant une aversion pour le risque plus importante.

4. Représentez sur votre graphique les courbes d'indifférence des investisseurs *A* et *B* (vous dessinerez le courbe d'indifférence de l'investisseur *B* en pointillé), en supposant que l'achat et la vente à découvert sont autorisés.
   Mettez en évidence le portefeuille choisi par chaque investisseur.

3 pts :
1 pt par courbe d'indifférence (=2pts)
0.5 pt par portefeuille optimal (=1 pt)

On suppose que le CAPM est vérifié.

5. Déterminez l'écart type du portefeuille *P1* qui est sur la SML, dont le rendement espéré μ_{P1} est de 10% et dont le risque unique (en termes de variance) représente 40% du risque total (en termes de variance).

(1.5 pts)
Comme le risque unique représente 40% du risque total en termes de variance, on en déduit que $1-\rho^2_{P1,T}$ ***= 0.40. (0.5 pt) De plus, P1 étant sur la SML, il satisfait le CAPM et donc*** $\beta_1 = \dfrac{\mu_{P1} - r_f}{\mu_T - r_f}$ ***= 0.4. (0.5 pt) Ces deux éléments nous permettent de calculer*** $\sigma_{P1} = \beta_1 \dfrac{\sigma_T}{\rho_{P1,T}}$ ***= 0.0929. (0.5 pt)***

On considère les portefeuilles *P2* et *P3* qui ont les caractéristiques suivantes :
- *P2* est un portefeuille efficient qui a un rendement attendu μ_{P2} = 11.5%,
- *P3* a un ratio de Treynor égal à 0.18 et est composé de 40% d'action 1, 80% d'action 2 et -20% d'actif sans risque.

6. Déterminez les bêtas de portefeuilles *P2* et *P3* (β_2 et β_3).
   Déterminez le risque unique et le risque systématique (en termes de variance) du portefeuille *P3*. Est-il efficient ?

(3.5 pts)

Le portefeuille P2 étant efficient, il satisfait le CAPM et donc $\beta_2 = \dfrac{\mu_{P2} - r_f}{\mu_T - r_f}$ ***= 0.55. (1 pt)***

Le rendement attendu du portefeuille P3 est $\mu_{P3} = 0.4\mu_1 + 0.8\mu_2 - 0.2r_f = 0.172$. ***(0.5 pt) Il s'ensuit que*** $\beta_3 = \dfrac{\mu_{P3} - r_f}{TR3} = 0.6222$. ***(0.5 pt)***

La variance de P3 est $\sigma_{P3}^2 = 0.4^2\sigma_1^2 + 0.8^2\sigma_2^2 + 2*0.4*0.8*0.3\sigma_1\sigma_2$ ***= 0.0409. Le risque systématique est*** $\beta_3^2\sigma_T^2$ ***= 0.0126. (0.5 pt) Le risque unique est donc 0.0409-0.0126 = 0.0283. (0.5 pt) Le portefeuille P3 a un risque unique strictement positif, il n'est donc pas efficient (0.5 pt).***

Se souvenant des critiques faites concernant le CAPM, les analystes financiers décident d'utiliser l'APT à deux facteurs macroéconomiques (l'inflation et la croissance réelle du PNB) afin d'évaluer les rendements espérés des actifs financiers. La prime de risque de l'inflation est égale à 0.86, celle de la croissance réelle du PNB à 0.76. Les actions 1 et 2 sont caractérisées par les sensibilités suivantes à ces deux facteurs :

	inflation	croissance réelle du PNB
action 1	$x_{I,1}$	0.2
action 2	-0.8	$x_{C,2}$

7. Sachant que les actions 1 et 2 satisfont l'APT, déterminez $x_{I,1}$ et $x_{C,2}$.

(1 pt)

$x_{I,1} = \dfrac{0.1 - 0.06 - 0.2*0.76}{0.86}$ ***= -0.1302 (0.5 pt), et*** $x_{C,2} = \dfrac{0.18 - 0.06 + 0.8*0.86}{0.76}$ ***= 1.0632. (0.5 pt)***

Il existe une troisième action sur le marché, l'action 3, dont les sensibilités à l'inflation et à la croissance réelle du PNB sont données dans le tableau ci-dessous.

	inflation	croissance réelle du PNB
action 3	-0.7	0.9

Sur le marché, l'action 3 a un rendement espéré de 13%.

8. Existe-t-il une opportunité d'arbitrage ? Si oui, décrivez-la très soigneusement. Quel est le gain que vous pouvez faire ?

(6 pts)

Selon l'APT, $\mu_{P3} = -0.7*0.86+0.9*0.76+0.06 = 0.1420$. ***(1 pt)***

Il existe une opportunité d'arbitrage de gagner 1.2% en ne prenant aucun risque. Puisque

le rendement de l'action 3 est inférieur à ce que prédit l'APT, nous allons vendre cet actif. ***(1 pt)****Nous aurons une sensibilité de 0.7 à l'inflation et de -0.9 à la croissance du PNB. Afin d'éliminer le risque systématique, nous allons combiner les actions 1 et 2 pour avoir une sensibilité de -0.7 à l'inflation et de 0.9 à la croissance réelle du PNB :*

$$\begin{cases} -0.1302w_1 - 0.8w_2 = -0.7 \\ 0.2w_1 + 1.0632w_2 = 0.9 \end{cases}$$

.(1 pt) La solution est w_1 = -1.1237(0.5 pt), w_2 = 1,0579(0.5 pt).

Sachant qu'une position, de -1 est prise dans l'action 3(0.5 pt), il faut prendre une position de - (-1.1237 +1.0579-1) = 1.0658 dans l'actif sans risque. (0.5 pt)

Au total, le rendement de cette opération est :
-1.1237 * 0.1+1,0579*0.18-1*0.13+1.0658*0.06 = 0.012. (1 pt)

C'est la différence entre le rendement prédit par APT pour le 3ème actif (0.142) et son rendement actuel (0.13). Donc, si on vend à découvert pour 100 millions CHF, le gain dans une année est de 1.2 millions CHF.

Exercice III (25 points)

L'entreprise Pomme SA est uniquement financée par capitaux propres. Elle a un bénéfice moyen avant intérêts et impôts (EBIT) de 50 millions de CHF par an. Il y a 10 millions d'actions en circulation. Le bêta des actions de l'entreprise est égal à 2. Le taux sans risque est de 5% et le rendement espéré du portefeuille de marché est de 10%.

L'entreprise paie 60% de son bénéfice sous forme de dividendes et utilise le restant de 40% pour racheter ses propres actions. Le paiement de dividendes a lieu juste avant le rachat d'actions.

Le paiement de dividendes et le rachat d'actions pour l'année en cours viennent d'avoir lieu. Pomme SA est imposée au taux de 30% sur le bénéfice qu'elle réalise.

1. Quel est le rendement attendu sur les actions de Pomme SA?

Solution *On utilise CAPM:*

$$r_E = r_f + \beta(r_M - r_f) = 0.15$$

(1.5 pts)

2. Remplissez le tableau suivant :

Bénéfice avant intérêts et impôts	
Intérêts	
Bénéfice avant impôts	
Impôts	
Bénéfice après impôts	

Solution

Bénéfice avant intérêts et impôts	*50 millions CHF*
Intérêts	*0*
Bénéfice avant impôts	*50 millions CHF*
Impôts	*15 millions CHF*
Bénéfice après impôts	*35 millions CHF*

(2.5 pts, 0.5 pour chaque ligne du tableau)

3. Quelle est la valeur de marché totale de Pomme SA?

Solution *Avec un bénéfice après impôts de 35 millions chaque année (calculé au point 2), actualisé au taux de 15% (calculé au point 1), la valeur de marché totale de Pomme SA est*

$$V_U = \frac{35}{0.15} = 233.33 \text{ millions CHF}$$

(1.5 pts)

4. Quel est le β de ses actifs?

Solution *Le β des actifs est égal au β des actions, parce que Pomme SA est financée entièrement par capitaux propres. Donc, le β des actifs est égal à 2.*
(1.5 pts)

5. Quel est le cours actuel des actions de Pomme SA? Quel est le bénéfice par action (net d'impôts) attendu dans une année?

Solution *Le cours des actions de l'entreprise est égal à*

$$P_0 = \frac{233.33}{10} = 23.33 \text{ CHF}$$

Le bénéfice par action est égal à 3.5 CHF (35 millions/10 millions).
(2 pts, 1 pour cours, 1 pour bénéfice)

6. Quel est le cours attendu des actions de Pomme SA dans un an juste avant le paiement de dividendes? Quel est le dividende par action? Quel est le cours attendu des actions juste après le paiement de dividendes, mais avant le rachat d'actions?

Solution *Dans une année, la valeur de chaque action augmente de 3.5 CHF, à 26.83 CHF. Le dividende par action est de* $3.5 \times 0.6 = 2.1$ *CHF. Après le paiement du dividende, la valeur sera de*

$$26.83 - 3.5 \times 0.6 = 24.73 \text{ CHF}$$

(3 pts, 1 pour cours avant, 1 pour dividende, 1 pour cours après)

7. Déterminez le nombre d'actions et leur cours attendu dans un an juste après le rachat d'actions. Combien d'actions reste-t-il sur le marché après le rachat?

Solution *Il reste* $35 \times 0.4 = 14$ *millions CHF pour racheter des actions. Le nombre d'actions rachetées est donc de*

$$14'000'000/24.73 = 566'038 \text{ actions}$$

Leur cours attendu reste à 24.73 CHF. Il reste 9'433'962 actions en circulation.
(3 pts, 1 pour nb rachetées, 1 pour cours, 1 pour nb restant)

8. Quel est le cours attendu des actions de Pomme SA dans deux ans juste avant le paiement de dividendes? Quel est le dividende par action? Quel est le cours attendu des actions juste après le paiement de dividendes, mais avant le rachat d'actions?

Solution *Dans deux ans, le bénéfice (net d'impôts) est toujours de 35 millions CHF. Le bénéfice par action est donc de*

$$\frac{35'000'000}{9'433'962} = 3.71 \text{ CHF}$$

La valeur de chaque action augmente de 3.71 CHF, à 28.44 CHF. Le dividende par action est de $3.71 \times 0.6 = 2.23$ *CHF. Après le paiement du dividende, la valeur sera de*

$$28.44 - 3.71 \times 0.6 = 26.22 \text{ CHF}$$

(3 pts, 1 pour cours avant, 1 pour dividende, 1 pour cours après)

9. Déterminez le nombre d'actions et leur cours attendu dans deux ans juste après le rachat d'actions. Combien d'actions reste-t-il sur le marché après le rachat?

Solution *Il reste* $35 \times 0.4 = 14$ *millions CHF pour racheter des actions. Le nombre d'actions rachetées est donc de*

$$\frac{14'000'000}{26.22} = 533'998 \text{ actions}$$

Leur cours attendu reste à 26.22 CHF. Il reste 8'899'964 actions en circulation.
(3 pts, 1 pour nb rachetées, 1 pour cours, 1 pour nb restant)

10. L'entreprise décide de changer de politique de dividendes et de verser l'intégralité de ses bénéfices sous forme de dividendes. Remplissez le tableau suivant et justifiez vos réponses.

Cours des actions aujourd'hui	
Cours des actions dans 1 an, après dividende	
Cours des actions dans 2 ans, après dividende	
Cours des actions dans 3 ans, après dividende	
Cours des actions dans 4 ans, après dividende	

Solution

Cours des actions aujourd'hui	*23.33 CHF*
Cours des actions dans 1 an, après dividende	*23.33 CHF*
Cours des actions dans 2 ans, après dividende	*23.33 CHF*
Cours des actions dans 3 ans, après dividende	*23.33 CHF*
Cours des actions dans 4 ans, après dividende	*23.33 CHF*

Le cours est chaque fois 23.33, parce que l'entreprise paie l'intégralité de ses bénéfices sous forme de dividendes. Donc, le cours monte à 26.83 CHF avant le paiement du dividende, ensuite tombe à 23.33 une fois le dividende (3.5 CHF) payé.
(2 pts, 1 pour tableau, 1 pour justification)

11. Ce changement de politique de dividendes a-t-il un effet sur la valeur de l'entreprise? Justifiez votre réponse.

Solution *Non, dans ce cas la fiscalité sur l'entreprise n'a pas d'effet sur la valeur de l'entreprise, parce que les actionnaires ne sont pas imposés (sur les dividendes reçus ou sur les gains de capitaux).*
(2 pts, 1 pour réponse NON, 1 pour justification)

Exercice IV (25 points)

Les actions de l'entreprise Macrosoft SA sont cotées en permanence et valent actuellement 50 CHF sur le marché. Les actions ne versent pas de dividendes et la volatilité annuelle de leur rendement est de 30%. Le taux d'intérêt de l'actif sans risque continûment composé est $r_c = 6\%$ par an.

On considère un call européen ayant pour sous-jacent une action Macrosoft et expirant dans une année. Son prix d'exercice est de 50 CHF.

1. Vous décidez d'évaluer l'option avec un modèle binomial à une période. Calculez u, d, et r correspondant à un modèle binomial à une période.

Solution *On utilise les formules du cours:*

$$u = e^{\sigma\sqrt{T/1}} = 1.3499$$
$$d = 1/u = 0.7408$$
$$r = e^{r_c T/1} - 1 = 0.0618$$

(3 pts, 1 pour u, 1 pour d, 1 pour r)

2. Trouvez le portefeuille de réplication et le prix de l'option call aujourd'hui. Interprétez la valeur de δ (le nombre d'actions dans le portefeuille de réplication).

Solution *Tout d'abord, nous devons calculer les valeurs de l'action et du call dans une période :*

Prix de l'action	*Valeur du Call*
$S_1^u = uS_0$=*67.4929*	$C_1^u = Max[S_1^u - K, 0]$=*17.4929*
$S_1^d = dS_0$=*37.0409*	$C_1^d = Max[S_1^d - K, 0]$=*0*

La formule du portefeuille de réplication est $C_0 = \delta S_0 + b$, où δ représente le nombre d'actions achetées et b le montant investi au taux sans risque. On trouve

$$\delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_1^u - S_1^d} = 0.5744$$
$$b = \frac{C_1^u - \delta S_1^u}{1 + r} = -20.0387$$

Le nombre d'actions (δ) représente la sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations dans le prix de l'action. Le prix de l'option call aujourd'hui est de

$$C_0 = \delta S_0 + b = 8.6834$$

(5 pts, 1 pour tableau, 1 pour delta, 1 pour b, 1 pour interprétation, 1 pour prix)

3. Que feriez-vous si le prix du call sur le marché était de 5 CHF? Expliquez clairement votre stratégie d'arbitrage. Quel est le gain d'arbitrage au temps 0?

Solution *On achète le call au prix du marché qui est de 5 CHF et on vend à découvert le*

portefeuille de réplication trouvé au point 2. Au temps 0, le bénéfice de cette stratégie est de 8.6834-5=3.6834 CHF, qui représente la différence entre le prix du marché et le prix théorique.
(2 pts, 1 pour stratégie correcte, 1 pour gain d'arbitrage)

4. Dans le cadre de ce modèle binomial à une période, vous estimez la probabilité de l'état haussier à 75% et la probabilité de l'état baissier à 25%. Quel est le taux de rendement physique de l'action? Quel est le taux de rendement physique de l'option call? Trouvez-vous une valeur plus grande ou plus petite que le taux de rendement de l'action? Expliquez pourquoi.

Solution *Le rendement de l'action compte tenu des probabilités d'augmentation et de diminution est*

$$r_{Action} = \frac{0.75 \times S_1^u + 0.25 \times S_1^d}{S_0} - 1 = 0.1976,$$

tandis que le rendement de l'option call est

$$r_{Call} = \frac{0.75 \times C_1^u + 0.25 \times C_1^d}{C_0} - 1 = 0.5109.$$

Cette valeur est supérieure au rendement de l'action, en raison de l'effet de levier.
(3 pts, 1 pour taux action, 1 pour taux option, 1 pour comparaison valeurs)

5. En partant de la formule du cours $C_0 = \delta S_0 + b$, écrivez la valeur de l'option au temps zéro comme dans l'équation suivante et déterminez la valeur de q:

$$C_0 = \frac{qC_1^u + (1-q)C_1^d}{1+r}$$

Solution *On remplace δ et b dans $C_0 = \delta S_0 + b$:*

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0(u-d)} S_0 + \frac{C_1^d u - C_1^u d}{(1+r)(u-d)} \\ &= \frac{C_1^u \frac{1+r-d}{u-d} + C_1^d \left(1 - \frac{1+r-d}{u-d}\right)}{1+r} \end{aligned}$$

et donc $q = \frac{1+r-d}{u-d} = 0.5271.$
(3 pts, 2 pour calcul analytique, 1 pour valeur de q)

6. Si on considère un autre monde dans lequel les probabilités de hausse et de baisse sont de q et $(1-q)$ respectivement (où q a été obtenu à la question précédente), quelle serait la rentabilité de l'action? Quelle serait la rentabilité de l'option? Comparez-la avec la rentabilité de l'action et interprétez votre résultat.

Solution *Le rendement de l'action compte tenu des nouvelles probabilités est*

$$r_{Action}^{\mathbb{Q}} = \frac{0.5271 \times S_1^u + 0.4729 \times S_1^d}{S_0} - 1 = 0.0618,$$

tandis que le rendement de l'option call est

$$r_{Call}^{\mathbb{Q}} = \frac{0.5271 \times C_1^u + 0.4729 \times C_1^d}{C_0} - 1 = 0.0618.$$

Cette fois on obtient les mêmes valeurs, égales au taux sans risque obtenu au point 1. Comme nous sommes dans un monde risque-neutre, les investisseurs sont indifférents au risque, donc ils ne demandent pas de rendement supplémentaire pour l'action ou pour l'option.
(3 pts, 1 pour taux action, 1 pour taux option, 1 pour comparaison)

7. On considère maintenant les données initiales, sauf que le modèle binomial est étendu à 3 périodes (en gardant la même maturité de l'option). Le prix de l'option call est de 7.8136 CHF. Trouvez le taux sans risque r correspondant au modèle binomial à 3 périodes. Calculez ensuite le prix d'une option put avec même prix d'exercice et même maturité que l'option call.

Solution *Le taux sans risque correspondant à un modèle binomial à 3 périodes est*

$$r = e^{r_c T/3} - 1 = 0.0202$$

Nous pouvons calculer le prix de l'option put avec la relation de parité:

$$\begin{aligned} P_0 &= C_0 - S_0 + \frac{K}{(1+r)^3} \\ &= 7.8136 - 50 + \frac{50}{(1.0202)^3} = 4.9018 \end{aligned}$$

(2 pts, 1 pour r, 1 pour prix de l'option put)

8. Nous sommes maintenant en temps continu, avec les données initiales. Trouvez le prix d'un portefeuille contenant une option call *long* et une option put *short*. Les deux options ont un prix d'exercice de 50 et une maturité d'une année.

Solution *Nous pouvons directement utiliser la relation de parité:*

$$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-r_c T} = 2.9118$$

(2 pts, 1 pour formule parité, 1 pour résultat. Si Black-Scholes est utilisé, 2 pts)

9. Que feriez-vous si le prix de ce portefeuille sur le marché était de 5 CHF? Expliquez clairement votre stratégie d'arbitrage. Quel est le gain d'arbitrage au temps 0?

Solution *On emprunte 50 CHF (valeur faciale) au taux sans risque et on achète une action. Notre investissement initial est donc de 2.9118 CHF. Ensuite, on vend à découvert une option call et on achète une option put dans le marché (on prend une position short dans le portefeuille à 5 CHF). Au temps 0, le bénéfice de cette stratégie est de 5-2.9118=2.0882 CHF, qui représente la différence entre le prix du marché et le prix théorique.*
(2 pts, 1 pour stratégie correcte, 1 pour gain d'arbitrage)