FACULTE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES DE L'UNIVERSITE DE LAUSANNE

Professeurs : **D. Andrei** **C. Bobtcheff**	**Matière :** **Principes généraux de finance**	**Session :** **Eté 2010**

Informations générales:

- Documentation autorisée.
- Calculatrices autorisées avec restriction (selon info sur le site web du cours).
- Examen de 21 pages (page de titre comprise).
- Le nombre total de points est de 100.
- Prière de répondre directement dans les espaces prévus à cet effet. Sauf mention explicite à la question concernée, les feuilles de brouillon ne seront pas corrigées.

Nom et prénom	**No matricule**	**No de place**

Note: ....

Q1 : ....
Q2 : ....
Q3 : ....
Q4 : ....
Bonus : ....
Total : ....

****

Exercice 1 (20 points)

Dans son usine de production, la société Titule SA envisage de remplacer une machine dont la valeur résiduelle est nulle. Deux solutions sont envisagées :

- solution *A* : acheter une machine ayant un coût de 400'000 CHF et dont la durée de vie est de 5 ans. La première année, cette machine nécessite des coûts de maintenance de 20'000 CHF, mais permettra d'économiser 50'000 CHF par an. Ces montants croîtront au taux de 5% les quatre années suivantes.
- solution *B* : dans ce cas, la machine coûte 600'000 CHF et a une durée de vie de 7 ans. L'économie générée est de 70'000 CHF par an, pour des coûts annuels de maintenance de 15'000 CHF (ces deux montants sont constants pendant tout la durée de vie de la machine).

Les deux machines sont amorties linéairement, mais la première n'aura pas de valeur résiduelle, tandis que la deuxième pourra être revendue pour 60'000 CHF à la fin de la 7ème année.

On suppose que le produit des ventes est le même pour les deux machines, et que les autres charges sont également identiques.

Le taux d'imposition est de 35%, et le coût du capital est de 10%.

Questions :
(vous pouvez utiliser la grille pour répondre aux questions)

Deux cas peuvent être envisagés selon que l'on considère que les flux sont imposés ou non. En effet, en général, les flux négatifs ne sont pas imposés. Cependant, comme ici il s'agit d'un différentiel de flux, on peut s'imaginer qu'il s'agit d'un crédit d'impôts et dans ce cas on a une imposition. Les deux cas sont acceptés.

Avec impôts :

a. (15 points) Si les machines ne peuvent pas être remplacées à la fin de leur durée de vie, quelle solution doit-elle être choisie par Titule SA ?

tau	35%	r	10%	g	0,05

solution *A* I1 400 000,00

année	0	1	2	3	4	5
CFAI	- 400 000,00	30 000,00	31 500,00	33 075,00	34 728,75	36 465,19
amortissement		80 000,00	80 000,00	80 000,00	80 000,00	80 000,00
impôts		- 17 500,00	- 16 975,00	- 16 423,75	- 15 844,94	- 15 237,18
CF	- 400 000,00	47 500,00	48 475,00	49 498,75	50 573,69	51 702,37

pas de flux liés à la revente

CF finaux	- 400 000,00	47 500,00	48 475,00	49 498,75	50 573,69	51 702,37
CF finaux actualisés	- 400 000,00	43 181,82	40 061,98	37 189,14	34 542,51	32 103,11
VAN	- 212 921,44					

solution *B*		I2	600 000,00					
année	0	1	2	3	4	5	6	7
CFAI	- 600 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00
amortissement		85 714,29	85 714,29	85 714,29	85 714,29	85 714,29	85 714,29	85 714,29
impôts		- 10 750,00	- 10 750,00	- 10 750,00	- 10 750,00	- 10 750,00	- 10 750,00	- 10 750,00
CF	- 600 000,00	65 750,00	65 750,00	65 750,00	65 750,00	65 750,00	65 750,00	65 750,00

flux liés à la revente	
bénéfice de la revente	60 000,00
flux liés à la revente	39 000,00

CF finaux	- 600 000,00	65 750,00	65 750,00	65 750,00	65 750,00	65 750,00	65 750,00	104 750,00
CF finaux actualisés	- 600 000,00	59 772,73	54 338,84	49 398,95	44 908,13	40 825,58	37 114,16	53 753,31
VAN	- 259 888,30							

Si les projets ne peuvent pas être répétés, on préfère la solution A.

b. (5 points) Si maintenant les machines peuvent être remplacées à l'identique un nombre infini de fois, quelle solution doit-elle être choisie par Titule SA ? Le résultat est-il le même qu'à la question a) ? Pourquoi ?

Si les projets peuvent être répétés, il faut calculer le flux constant qui génère la même VAN. D'après le cours ce flux est égal à

$$C_i = \frac{rVAN_i}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T_i}}.$$

On a $C_1 = -56168.14$ *et* $C_2 = -53382.49$.
Si les projets peuvent être répétés, la solution B est celle qui crée le plus de valeur.

Sans impôts :

a. (15 points) Si les machines ne peuvent pas être remplacées à la fin de leur durée de vie, quelle solution doit-elle être choisie par Titule SA ?

tau	35%	r	10%	g	0,05

solution *A*		I1	400 000,00		
année	0	1	2	3	4	5
CFAI	- 400 000,00	30 000,00	31 500,00	33 075,00	34 728,75	36 465,19
amortissement		80 000,00	80 000,00	80 000,00	80 000,00	80 000,00
impôts 1		-	-	-	-	-
CF	- 400 000,00	30 000,00	31 500,00	33 075,00	34 728,75	36 465,19

pas de flux liés à la revente

CF finaux	- 400 000,00	30 000,00	31 500,00	33 075,00	34 728,75	36 465,19
CF finaux actualisés	- 400 000,00	27 272,73	26 033,06	24 849,74	23 720,20	22 642,01
VAN	- 275 482,26					

solution *B*		I2	600 000,00					
année	0	1	2	3	4	5	6	7
CFAI	- 600 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00
amortissement		85 714,29	85 714,29	85 714,29	85 714,29	85 714,29	85 714,29	85 714,29
impôts		-	-	-	-	-	-	-
CF	- 600 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00

flux liés à la revente								
bénéfice de la revente	60 000,00							
flux liés à la revente	39 000,00							
CF finaux	- 600 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	55 000,00	94 000,00
CF finaux actualisés	- 600 000,00	50 000,00	45 454,55	41 322,31	37 565,74	34 150,67	31 046,07	48 236,86
VAN	- 312 223,80							

Si les projets ne peuvent pas être répétés, on préfère la solution A.

b. (5 points) Si maintenant les machines peuvent être remplacées à l'identique un nombre infini de fois, quelle solution doit-elle être choisie par Titule SA ? Le résultat est-il le même qu'à la question a) ? Pourquoi ?

Si les projets peuvent être répétés, il faut calculer le flux constant qui génère la même VAN. D'après le cours ce flux est égal à

$$C_i = \frac{rVAN_i}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T_i}}.$$

On a $C_1 = -72671.53$ *et* $C_2 = -64132.49$.
Si les projets peuvent être répétés, la solution B est celle qui crée le plus de valeur.

Exercice 2 (30 points)

Vous avez la possibilité d'acheter des actions Danone ou Nestlé présentant les caractéristiques suivantes :

	Rendement attendu	Ecart type
Danone	0.1	0.15
Nestlé	0.21	0.25

Questions :

a. (5 points) Déterminez la composition du portefeuille à variance minimale globale ainsi que son rendement attendu et son écart type lorsque le coefficient de corrélation entre les actions Danone et Nestlé ρ_{DN} est égal à 0, 0.5 et -1.
Selon vous, laquelle de ces trois valeurs est la valeur la plus probable pour le coefficient de corrélation ?

D'après le cours, quand il y a uniquement 2 actifs risqués, la composition du portefeuille à variance minimale globale est égale à :

$$w_g = \frac{\sigma_N^2 - \rho_{DN}\sigma_D\sigma_N}{\sigma_D^2 + \sigma_N^2 - 2\rho_{DN}\sigma_D\sigma_N}.$$

Ainsi :

- *si $\rho_{DN} = 0$, $w_g = 0.7353$, $\mu_g = 0.1291$ et $\sigma_g = 0.1286$. Le portefeuille à variance minimale globale est composé pou 73.53% d'actions Danone et pour 26.47% d'actions Nestlé,*
- *si $\rho_{DN} = 0.5$, $w_g = 0.9211$, $\mu_g = 0.1087$ et $\sigma_g = 0.1490$. Le portefeuille à variance minimale globale est composé pou 92.11% d'actions Danone et pour 7.89% d'actions Nestlé,*
- *si $\rho_{DN} = -1$, $w_g = 0.625$, $\mu_g = 0.14125$ et $\sigma_g = 0$. Le portefeuille à variance minimale globale est composé pou 62.5% d'actions Danone et pour 37.5% d'actions Nestlé. Ce portefeuille est sans risque.*

Les entreprises Nestlé et Danone sont toutes deux des entreprises agro-alimentaires, il semble donc normal qu'elles aient des comportements similaires. La valeur la plus probable pour leur coefficient de corrélation est 0.5.

Des analyses empiriques plus poussées ont démontré qu'en fait le coefficient de corrélation entre l'action Danone et l'action Nestlé, ρ_{DN}, est égal à 0.3. On suppose de plus qu'il existe un actif sans risque dont le rendement r_f est égal à 4.5%.

b. (6 points) Déterminez la composition du portefeuille de tangence.
Donnez l'équation déterminant l'ensemble des portefeuilles efficients. Comment s'appelle cet ensemble ?
Déterminez la composition du portefeuille efficient P_1 ayant un rendement attendu μ_1=8%. Quel est son écart type σ_1 ?

Lorsqu'il y a un actif sans risque dans l'économie, la composition du portefeuille de tangence est donnée par :

$w_T = \dfrac{\Sigma^{-1}(\mu - r_f 1)}{B - Ar_f}$ *avec* $A = 1'\Sigma^{-1}1$, $B = 1'\Sigma^{-1}\mu$ *et* $C = \mu'\Sigma^{-1}\mu$.

Avec les valeurs de la donnée, $w_T = \begin{bmatrix} 0.3382 \\ 0.6618 \end{bmatrix}$. *Le portefeuille de tangence est composé à 33.82% par des actions Danone et à 66.18% par des actions Nestlé.*

L'ensemble des portefeuilles efficients s'appellent la Capital Market Line (CML), et son équation est donnée par :

$$\mu_P = r_f + \frac{\mu_T - r_f}{\sigma_T}\sigma_P,$$

où $\mu_T = w_T'\mu$ *et* $\sigma_T^2 = w_T'\Sigma w_T$. *Cela donne :* $\mu_P = 0.045 + 0.6833\sigma_P$.

Si on considère un portefeuille efficient P_1 *ayant un rendement attendu* μ_1*=8%, son écart type* σ_1 *= (0.08-0.045)/0.6834=0.0512.*

Le portefeuille P1 est efficient, il n'est donc composé que du portefeuille de tangence et de l'actif sans risque. Soit w_t *la proportion de la richesse investie dans le portefeuille de tangence. On a donc :* $\sigma_1^2 = w_t^2\sigma_T^2$, *d'où* $w_t = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_T} = 27.39\%$. *Notez qu'on a le même résultat en raisonnant sur les rendements attendus :* $w_t = \dfrac{\mu_1 - r_f}{\mu_T - r_f}$. *Ainsi :*

- *1-0.2739=72.61% de la richesse est investie dans l'actif sans risque,*
- *0.2739*0.3382=9.26% de la richesse est investie dans l'action Danone,*
- *0.2739*0.6618=18.13% de la richesse est investie dans l'action Nestlé.*

On considère un investisseur ayant une fonction d'utilité CARA est $u(W) = -\dfrac{e^{-2W}}{2}$.

c. (3 points) Déterminez *a*, le coefficient d'aversion absolue au risque de l'investisseur. Déterminez la composition du portefeuille optimal sachant que l'investisseur a des préférences moyenne-variance.

Avec cette fonction CARA, le coefficient d'aversion absolue au risque est égal à 2. On peut le calculer directement : $a(W) = -\dfrac{u''(W)}{u'(W)}$.

La part de la richesse investie dans le portefeuille de tangence pour le portefeuille optimal satisfait $w_t = \dfrac{\mu_T - r_f}{a\sigma_T^2} = 1.8266$. *Cela signifie que :*

- *l'investisseur emprunte 0.8266 dans l'actif sans risque,*
- *il investit 1.8266*0.3382 = 0.6178 dans l'action Danone et*
- *il investit 1.8266*0.6618 = 1.2088 dans l'action Nestlé.*

d. (6 points) On considère un portefeuille P_2 qui satisfait le CAPM et qui a les caractéristiques suivantes :

- $\beta_2 = \beta_1/2$,

- le risque systématique du portefeuille P_2 représente 40% de son risque total (pris en termes de variance).

Déterminez le rendement attendu μ_2 du portefeuille P_2 ainsi que son écart type σ_2.

Le risque de tout portefeuille peut se décomposer en son risque systématique et son risque unique : $\sigma_2^2 = (1-\rho_{2m}^2)\sigma_2^2 + \rho_{2m}^2\sigma_2^2$ *où* $(1-\rho_{2m}^2)\sigma_2^2$ *est le risque unique (en termes de variance) et* $\rho_{2m}^2\sigma_2^2$ *est le risque systématique en termes de variance. D'après l'énoncé, on sait que* $\frac{\rho_{2m}^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2} = 0.4$, *ce qui implique que* $\boxed{\rho_{2m} = \sqrt{0.4} = 0.6325}$

De plus, comme $\beta_2 = \beta_1/2$, *on peut directement calculer* σ_2. *En effet,* $\beta_2 = \rho_{2m}\sigma_2/\sigma_m$, *il s'ensuit que* $\sigma_2 = \sigma_m\beta_2/\rho_{2m}$. *Le portefeuille* P_1 *étant efficient, il satisfait le CAPM et* $\beta_1 = \frac{\mu_1 - r_f}{\mu_T - r_f} = 0.2739$. *Ainsi,* $\boxed{\sigma_2 = (\sigma_m\beta_1)/(2\rho_{2m}) = 0.0405}$.

μ_2 *peut-être obtenue directement car* P_2 *satisfait le CAPM :* $\boxed{\mu_2 = r_f+0.5\beta_1(\mu_m-r_f) = 0.0625}$.

e. (6 points) On considère un portefeuille P_3 qui satisfait le CAPM et ayant les caractéristiques suivantes :
   - $\mu_3 = \mu_2$,
   - $\beta_3 = \beta_2$,
   - $\sigma_3 = 0.8\sigma_2$.

   Que peut-on dire du portefeuille P_3 par rapport au portefeuille P_2 en termes de risque ?
   Calculez la proportion du risque systématique par rapport au risque total (en termes de variance) pour le portefeuille P_3.
   Si vous deviez investir exclusivement dans l'un des deux portefeuilles P_2 ou P_3, lequel choisiriez-vous ?

Les deux portefeuilles ont le même β, *donc le même risque systématique. Le portefeuille* P_3 *a un risque total plus faible que le portefeuille* P_2, *cela signifie donc qu'il a un risque unique plus faible.*

	risque unique	risque systématique	risque total
P_3	$(1-\rho_{3m}^2)\sigma_3^2$	$\rho_{3m}^2\sigma_3^2 = \rho_{2M}^2\sigma_2^2$	$\sigma_3^2 = (0,8\sigma_2)^2$
P_2	$(1-\rho_{2m}^2)\sigma_2^2$	$\rho_{2m}^2\sigma_2^2$	σ_2^2

On en déduit que $\rho_{3m} = \rho_{2m}/0.8 = 0.7906$. *Ainsi, le risque systématique représente* $\rho_{3m}^2 = 62.50\%$ *du risque total.*

Un investisseur préfère le portefeuille P_3 *car il a un risque unique et un risque total plus faible.*

f. (4 points) On suppose maintenant qu'il existe un quatrième actif dans l'économie, l'action Sanofi-Aventis, qui a les caractéristiques suivantes :

	Action Sanofi-Aventis
Rendement attendu	0.3
Ecart type	0.35
Coefficient de corrélation Danone Sanofi-Aventis	-0.05
Coefficient de corrélation Nestlé Sanofi-Aventis	-0.2

Avant de faire tout calcul, donnez une intuition sur l'évolution de la CML par rapport au cas où il n'y avait que deux actions.

Donnez l'équation de la CML. Ce résultat est-il en accord avec votre intuition ?

Avec une action en plus, pour un risque pris, le rendement attendu peut êter meilleur du fait de la diversification. Ainsi, la pente de la CML va être plus importante, et chaque unité de risque pris va être mieux rémunérée.

Il faut reprendre les calculs avec des matrices de taille 3x3.

$w_T = \dfrac{\Sigma^{-1}(\mu - r_f 1)}{B - Ar_f}$ *avec* $A = 1'\Sigma^{-1}1$, $B = 1'\Sigma^{-1}\mu$ *et* $C = \mu'\Sigma^{-1}\mu$.

Avec les valeurs de la donnée, $w_T = \begin{bmatrix} 0.1703 \\ 0.4577 \\ 0.3720 \end{bmatrix}$. *De plus,* $\mu_T = w_T'\mu = 0.2247$ *et* $\sigma_T^2 = w_T'\Sigma w_T = 0.1617$. *Cela donne :* $\mu_P = 0.045 + 1.1113\sigma_P$.

Exercice 3 (25 points)

Le 1^{er} janvier 2010, vous commencez votre nouveau stage chez Nesblé S.A., à Vevey, multinationale suisse du secteur de l'alimentaire. Cette entreprise a un bénéfice moyen avant intérêts et impôts $(EBIT)$ de 50'000 CHF par an. Elle est financée entièrement par des fonds propres. L'entreprise a également émis 5'000 actions, dont le rendement attendu après impôts (r_E) est de 10%. Ce premier jour, le CEO (Paul) veut vous voir afin de vous demander conseil sur les politiques de financement et de dividende de Nesblé S.A.

Il vous précise que le taux d'imposition sur les bénéfices (t_c) est de 30% et que les actionnaires paient 25% d'impôts sur les dividendes qu'ils reçoivent (t_d). Il n'y a pas d'imposition sur les plus-values financières $(t_{pv} = 0)$. Pour le moment, l'entreprise paie la totalité de son bénéfice net sous forme de dividende chaque année. La distribution des dividendes pour 2009 vient juste d'avoir lieu.

a) (3 points) Quel est le cours de chaque action le 1^{er} janvier 2010, c.-à-d. juste après le paiement du dividende de l'année précédente?

Le cours des actions de l'entreprise est égal à la valeur actuelle (au taux de 10%) des dividendes nets d'impôt. Le bénéfice après impôts est de 35'000:

Bénéfice avant intérêts et impôts	*50'000*
Intérêts	*0*
Bénéfice après intérêts et avant impôts	*50'000*
Impôts (30%)	*15'000*
Bénéfice après intérêts et impôts	*35'000*

Le bénéfice par action (net d'impôt) est donc de

$$(1-0.25)\frac{35'000}{5'000} = 5.25\,CHF \tag{1}$$

Par conséquent, le cours de chaque action est de

$$P = \frac{5.25}{0.10} = 52.5\,CHF \tag{2}$$

b) (1 point) Quel est le cours attendu de chaque action le 31 décembre 2010, juste avant le paiement du dividende?

Le cours attendu de l'action en fin d'année et égal à la somme du cours en début d'anneé et du montant de dividende net d'impôts:

$$52.5 + 5.25 = 57.75\,CHF \tag{3}$$

c) (1 point) Quelle est la valeur totale de l'entreprise sur le marché le 1^{er} janvier 2010, c.-à-d. juste après le paiement du dividende de l'année précédente?

La valeur totale de l'entreprise en début d'année est égale à la valeur totale des fonds propres

$$V_U = 5'000 \times 52.5 = 262'500\ CHF$$

d) (3 points) Quel est le coût moyen pondéré du capital de l'entreprise, en prenant en compte le fait que les dividendes sont imposés?

Le coût moyen pondéré du capital est donné par l'expression:

$$WACC = \frac{EBIT(1-t_c)}{V_U} = 13.33\% \tag{4}$$

On peut aussi utiliser la formule suivante:

$$WACC = \frac{D}{D+E}(1-t_c)r_D + \frac{E}{D+E}\frac{r_E}{(1-t_d)} = 13.33\% \tag{5}$$

On trouve $WACC > r_A$*, puisqu'il faut prendre en compte le fait que les dividendes sont imposés, et donc majorer* r_E *en conséquence.*

Paul vous demande comment la politique de distribution pourrait augmenter la valeur de l'entreprise. Vous lui communiquez que les actionnaires seraient plus contents si, à place de distribuer des dividendes, l'entreprise décide de racheter des actions. Il décide donc de suivre votre conseil et à partir de maintenant l'entreprise va racheter des actions. Le premier rachat d'actions va avoir lieu le 31 décembre 2010.

e) (2 points) Quel est le cours attendu des actions le 31 décembre 2010, juste avant le rachat? Quel est le nombre d'actions rachetées et leur cours attendu le 1^{er} janvier 2011, juste après le rachat?

Le bénéfice net par action est maintenant de $7\ CHF$*, puisqu'il n'y a pas d'imposition sur les plus-values financières. Le prix d'une action le 31 décembre 2010, juste avant le rachat est donc de:*

$$P = 7 + \frac{7}{0.1} = 77\ CHF \tag{6}$$

L'entreprise va racheter 35'000/77=454.55 actions. Le cours attendu des actions après le rachat sera toujours de 77 CHF.

f) (2 points) Quel est le cours attendu des actions le 31 décembre 2011, juste avant le rachat? Quel est le nombre d'actions rachetées et leur cours attendu le 1^{er} janvier 2012, juste après le rachat?

Le 31 décembre 2011, il reste 4545.45 actions sur le marché. Le bénéfice par action sera donc de 7.7 CHF. Le cours attendu des actions juste avant le rachat est 84.7 CHF. L'entreprise va racheter 413.22 actions et le cours attendu après le rachat sera toujours de 84.7 CHF.

g) (1 point) Paul se décide à faire une annonce concernant ce changement de politique de dividende le 2 janvier 2010. Quelle est la nouvelle valeur totale de l'entreprise sur le marché juste après l'annonce?

La valeur totale de l'entreprise est

$$V_U = 5'000 \times 70 = 350'000\ CHF \tag{7}$$

h) (3 points) Quel est le coût moyen pondéré du capital de l'entreprise, en prenant compte le fait que les dividendes sont imposés?

Le coût moyen pondéré du capital est donné par l'expression:

$$WACC = \frac{EBIT(1-t_c)}{V_U} = 10\% \tag{8}$$

On peut aussi utiliser la formule suivante:

$$WACC = \frac{D}{D+E}(1-t_c)r_D + \frac{E}{D+E}\frac{r_E}{(1-t_{pv})} = 10\% \tag{9}$$

Cette fois on obtient $WACC = r_A$*, parce qu'il n'y a pas d'impôts sur les plus-values financières.*

Il est 18h30, Paul est très content, et vous pensez pouvoir rentrer à la maison. Pas encore! En effet, Paul se demande maintenant comment la politique de financement pourrait augmenter la valeur de l'entreprise. Vous lui expliquez que Nesblé S.A. pourrait bénéficier d'un avantage fiscal si l'entreprise se décidait à s'endetter. Nous sommes donc maintenant dans le cas du *rachat d'actions* et l'entreprise se décide à contracter une dette perpétuelle pour une valeur nominale de 200'000 CHF. Cette dette est sans risque et rémunérée à 5% par an. Le lendemain (2 janvier 2010) il y aura une annonce, et un jour après, l'entreprise fera le changement de structure financière.

i) (2 points) Quelle est la nouvelle valeur totale de l'entreprise sur le marché juste après l'annonce? Quel est le cours de chaque action juste après l'annonce de cette décision par l'entreprise?

L'avantage fiscal de la nouvelle dette est de $200'000 \times t_c = 60'000$. *La valeur totale de l'entreprise est donc de* $V_L = 350'000 + 60'000 = 410'000$ *CHF. Le cours des actions va donc monter à*

$$P = \frac{350'000 + 60'000}{5000} = 82\ CHF \tag{10}$$

j) (1 point) Combien d'actions l'entreprise va-t-elle racheter?

L'entreprise va racheter $200'000/82 = 2439.02$ *actions.*

k) (3 points) Quel est le nouveau rendement exigé par les actionnaires, r_E ?

$$\begin{aligned} r_E &= r_A + \frac{D}{E}(1-t_c)(r_A - r_D) \\ &= 0.1 + \frac{200'000}{(410'000 - 200'000)} \times 0.7 \times 0.05 = 13.33\% \end{aligned} \tag{11}$$

l) (3 points) Quel est le coût moyen pondéré du capital de l'entreprise, en prenant en compte le fait que les dividendes sont imposés?

Le coût moyen pondéré du capital est donné par l'expression:

$$WACC = \frac{EBIT\left(1-t_c\right)}{V_L} = 8.54\% \qquad (12)$$

On peut aussi utiliser la formule suivante:

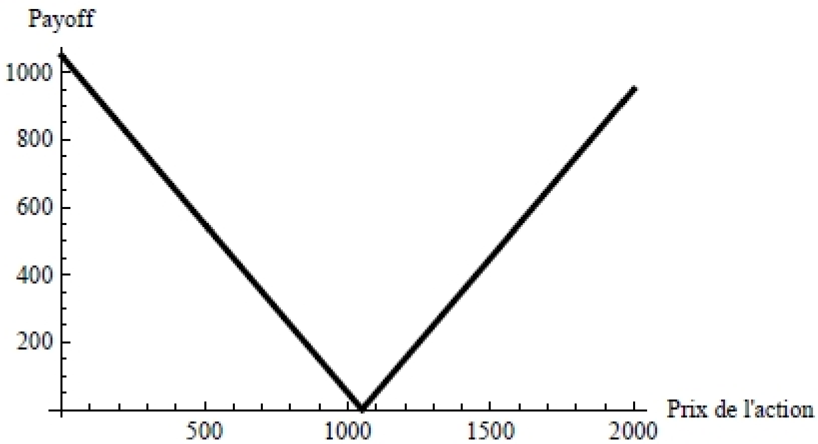
$$\begin{aligned} WACC \quad &= \frac{D}{D+E}\left(1-t_c\right)r_D + \frac{E}{D+E}\frac{r_E}{\left(1-t_{pv}\right)} \\ &= \frac{200'000}{410'0000}\times 0.7\times 0.05 + \frac{210'000}{410'000}\times 0.1333 = 8.54\% \end{aligned} \qquad (13)$$

Exercice 4 (25 points)

Vous commencez votre nouveau stage chez Risky Bank & Co, à Genève, le 1er juin 2010. On considère que cette date correspond à $t = 0$. Le même jour, le CEO (Bernard, il vous demande le jour même de le tutoyer) veut vous voir afin de vous demander conseil sur une nouvelle stratégie d'investissement.

Il vous dit que l'indice de marché S&P500 a atteint un niveau de $S_0 = 1'050$ \$ et qu'il y a beaucoup de volatilité dans les marchés pour les deux prochaines années, sans toutefois pouvoir deviner une tendance à la baisse ou à la hausse. Très enthousiaste, vous lui suggérez que dans ces conditions, il faudrait adopter une stratégie de type « straddle » avec une écheance de deux ans $(T = 2)$ et un prix d'exercice de $K = 1'050$ \$. N'ayant jamais entendu parler de ce type de stratégie, il vous fait entièrement confiance. Toutefois, il vous demande des détails supplémentaires.

a) (2 points) Dessinez le profil de gain à l'échéance de la stratégie (ignorez le coût d'achat des options) et expliquez pourquoi vous avez fait ce choix.



C'est une stratégie à utiliser quand on anticipe des larges mouvements du prix du sous-jacent, sans pour autant avoir d'anticipations quant au sens de ces mouvements.

Vous dites à Bernard que deux paramètres supplémentaires sont nécessaires pour mener l'analyse plus loin: le taux sans risque continûment composé r_f (en termes annuels) et la volatilité des rendements de l'indice S&P500 (en termes annuels). Il vous communique $r_f = 0.02$ mais vous demande de vous débrouiller pour la volatilité.

b) (2 points) Décrivez comment vous comptez obtenir la volatilité avec les données du marché:
i) quelles données allez-vous télécharger?
ii) quelle est la formule de la volatilité?

On télécharge les prix du S&P500 pour une période assez longue, ensuite on obtient les rendements. Ensuite on calcule la volatilité avec la formule suivante:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(r_i - \bar{r}\right)^2} \qquad (1)$$

c) (4 points) Après des heures de travail, vous trouvez $\sigma = 0.25$. Bernard vous demande alors d'évaluer la stratégie avec un modèle binomial à une période:

i) trouvez u, d et r qui correspondent au modèle binomial à une période.

ii) quel est le prix de la stratégie aujourd'hui, X_0? (utiliser la méthode du portefeuille de réplication)

iii) le S&P500 étant considéré comme portefeuille de marché, quel est son β? Quel est le β de la stratégie?

En utilisant les formules du cours, on trouve $u = 1.4241$, $d = 0.7022$ *et* $r = 0.0408$. *L'arbre binomial pour une période est:*

$$\begin{array}{ccc} & & S_1^u = 1'495.3 \\ & \nearrow & X_1^u = 445.3 \\ S_0 = 1'050 & & \\ X_0 = ? & \searrow & S_1^d = 737.3 \\ & & X_1^d = 312.7 \end{array}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{X_1^u - X_1^d}{S_1^u - S_1^d} = 0.1750 \\ b_0 &= \frac{X_1^u - \delta_0 S_1^u}{1+r} = 176.5 \end{aligned} \qquad (2)$$

Le prix de la stratégie est $X_0 = \delta_0 S_0 + b_0 = 360.2$ *\$.*
Le β *du portefeuille de marché est toujours* 1. *Le* β *de la stratégie est*

$$\beta_X = \frac{\delta_0 S_0}{\delta_0 S_0 + b_0}\beta_M = 0.51 \qquad (3)$$

Vous essayez d'expliquer à Bernard que l'évaluation avec un modèle binomial à une période est seulement une approximation du vrai prix. Vous dites que le vrai prix est effectivement donné par la formule de Black-Scholes. Bernard ne vous croit pas, il pense que les deux méthodes n'ont aucun lien. Vous vous décidez donc de lui montrer la convergence du modèle binomial vers la formule de Black-Scholes.

d) (3 points) Evaluez la stratégie avec un modèle à deux périodes par la technique des probabilités risque-neutre. Trouvez dans un premier temps les u, d, r et q correspondants, remplissez ensuite les cases vides dans le tableau suivant et calculez enfin le prix de la stratégie.

Nous avons $u = 1.2840$, $d = 0.7788$, $r = 0.0202$ *et* $q = 0.4778$.

k	*Etat*	C_n^k	$q^k(1-q)^{n-k}$	*Probabilité*	X_2
2	$2\times u$, $0\times d$	1	0.2283	0.2283	681.16
1	$1\times u$, $1\times d$	2	0.2495	0.4990	0
0	$0\times u$, $2\times d$	1	0.2727	0.2727	413.14

On trouve

$$X_0 = \frac{1}{(1+r)^2}\mathrm{E}_0^{\Theta}[X_2] = 257.65\,\$ \tag{4}$$

e) (3 points) Evaluez la stratégie avec un modèle à trois périodes par la technique des probabilités risque-neutre. Trouvez dans un premier temps les u, d, r et q correspondants, remplissez ensuite les cases vides dans le tableau suivant et calculez enfin le prix de la stratégie.

Nous avons $u = 1.2264$, $d = 0.8154$, $r = 0.0134$ *et* $q = 0.4818$.

k	*Etat*	C_n^k	$q^k(1-q)^{n-k}$	*Probabilité*	X_3
3	$3\times u$, $0\times d$	1	0.1118	0.1118	887
2	$2\times u$, $1\times d$	3	0.1203	0.3609	237.8
1	$1\times u$, $2\times d$	3	0.1294	0.3881	193.9
0	$0\times u$, $3\times d$	1	0.1392	0.1392	480.8

On trouve

$$X_0 = \frac{1}{(1+r)^3}\mathrm{E}_0^{Q}[X_3] = 314.3\,\$ \tag{5}$$

f) (3 points) Evaluez la stratégie avec un modèle à quatre périodes par la technique des probabilités risque-neutre. Trouvez dans un premier temps les u, d, r et q correspondants, remplissez ensuite les cases vides dans le tableau suivant et calculez enfin le prix de la stratégie.

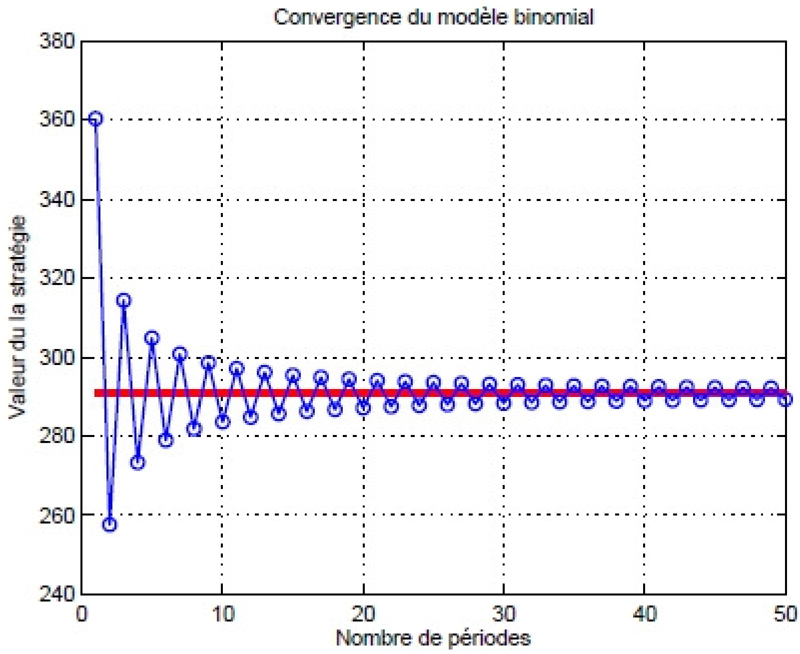
Nous avons $u = 1.1934$, $d = 0.8380$, $r = 0.0101$ *et* $q = 0.4842$.

k	*Etat*	C_n^k	$q^k(1-q)^{n-k}$	*Probabilité*	X_4
4	$4\times u$, $0\times d$	1	0.0550	0.0550	1079.5
3	$3\times u$, $1\times d$	4	0.0586	0.2342	445.3
2	$2\times u$, $2\times d$	6	0.0624	0.3743	0
1	$1\times u$, $3\times d$	4	0.0664	0.2658	312.7
0	$0\times u$, $4\times d$	1	0.0708	0.0708	532.3

On trouve

$$X_0 = \frac{1}{(1+r)^4} \mathrm{E}_0^{\mathbb{Q}}[X_4] = 273.3\,\$ \tag{6}$$

g) (1 point) Bernard ne comprend pas votre raisonnement. Montrez à l'aide d'un graphique comment, en augmentant le nombre de périodes, on s'approche vers une valeur limite du prix de la stratégie.



h) (3 points) Trouvez le prix de la stratégie en utilisant la formule de Black-Scholes.

En appliquant les formules du cours, on obtient

$$\begin{aligned} X_0 &= C_0 + P_0 \\ &= S_t(2\mathrm{N}(d_1)-1) - Ke^{-r(T-t)}(2\mathrm{N}(d_2)-1) \\ &= 290.7\,\$ \end{aligned} \tag{7}$$

Il est maintenant 18h30 et vous vous décidez de rentrer à la maison. Malheureusement, Bernard vous annonce qu'il n'y a pas d'options disponibles sur le marché avec ce prix d'exercice et avec cette maturité. Il est déçu de ne pas pouvoir poursuivre la dite stratégie. Une fois de plus, vous avez la solution: vous allez répliquer la stratégie.

i) (2 points) Quel est le portefeuille de réplication de la stratégie? Décrivez les positions dans l'actif risqué et l'actif sans risque.

$$\delta_0 = 2\mathrm{N}(d_1) - 1 = 0.2281 \tag{8}$$

$$b_0 = -Ke^{-r(T-t)}(2\mathrm{N}(d_2)-1) = 51.2 \tag{9}$$

Il faut acheter 0.2281 *actions et placer au taux sans risque* 51.2 *\$.*

Vous rentrez chez vous à 22h30. Le lendemain, Bernard vous annonce que vous avez bien passé le test et qu'il y a de bonnes perspectives pour vous chez Risky Bank & Co.

Une année plus tard, $(t=1)$, Bernard vous demande de vérifier si votre portefeuille de réplication doit être ajusté. Il pense que non, puisque le S&P500 est par coincidence au même niveau $(S_t = 1'050\,\$)$.

j) (2 points) Re-calculez le portefeuille de réplication. Pourquoi Bernard a-t-il eu tort de penser que le portefeuille de réplication serait le même?

$$\delta_0 = 2\mathrm{N}\,(d_1) - 1 = 0.1624 \tag{10}$$
$$b_0 = -Ke^{-r(T-t)}\left(2\mathrm{N}\,(d_2) - 1\right) = 36.94 \tag{11}$$

Il faut vendre $0.2281 - 0.1624 = 0.0657$ *actions et reduire la position sans risque à* 36.9 *\$. Le portefeuille de réplication ne dépend pas seulement du prix du sous-jacent, mais aussi de la maturité. Donc même si le prix du sous-jacent reste le même, il y aura des modifications à faire dans le portefeuille de réplication.*